
Digitized by Google

PROBLÈMES

ET DÉVELOPPEMENS

SUR DIVERSES PARTIES

DES MATHÉMATIQUES.

OUVRAGES DE M. REYNAUD.

1°. *Traité d'Arithmétique*, à l'usage des Ingénieurs du Cadastre. 5 f.
2°. *Traité d'Arithmétique*, à l'usage des Elèves qui se destinent à l'Ecole Polytechnique, à l'Ecole spéciale militaire et à la marine (12e édition) 3 f. 50 c.
3°. *Elémens d'Algèbre* (5e édition, 1821). 5 f. 50 c.
4°. *Elémens d'Algèbre*, 2e section (1re édition). 5 f.
5°. *Trigonométrie rectiligne et sphérique*, suivie des Tables de Logarithme de M. *Lalande* (2e édition). 3 f.
6°. *Traité d'application de l'Algèbre à la Géométrie*, comprenant la *Trigonométrie* (1re édition). 6 f.
7°. *Fragmens sur l'Algèbre et la Trigonométrie*. 6 f.
8°. *Manuel de l'Ingénieur du Cadastre*, par MM. Pommiés et Reynaud. 12 f.
9°. *Traité d'Arpentage de Lagrive*, avec les *Notes de Reynaud*. Ces Notes contiennent, la *Théorie des rentes perpétuelles et viagères*, plusieurs questions relatives à l'intérêt de l'argent, et des Tables de Logarithmes. 7 f.

Notes sur Bezout par Reynaud.

10°. *Arithmétique de Bezout*, avec les notes (11e édition). 3 f.
11°. *Géométrie de Bezout*, revue par *Reynaud*, et augmentée de Notes divisées en trois parties; la première est destinée à compléter la Géométrie de Bezout, et à lever les principales difficultés de la Géométrie; la seconde offre une collection de Problèmes et de Théorèmes; la troisième contient la *Théorie des Plans* et les Elémens de la *Géométrie descriptive*. 6 f.
12°. *Algèbre et Application de l'Algèbre à la Géométrie* de Bezout, avec les Notes (6e édition, 1823). 6 f.
Les Notes sur l'Arithmétique et sur l'Algèbre se vendent séparément.
13°. Traité élémentaire de Mathématiques, de Physique et de Chimie, à l'usage des Elèves qui se préparent aux examens pour le baccalauréat-ès-lettres.

Nota. L'*Arithmétique* (12e édition), l'*Algèbre* (5e édition), l'*application de l'Algèbre à la Géométrie*, comprenant la *Trigonométrie*, et les Notes sur l'*Algèbre* et sur la *Géométrie* de Bezout, sont particulièrement destinées aux Elèves qui se proposent d'entrer à l'Ecole royale Polytechnique, et à l'Ecole spéciale militaire. Ces ouvrages renferment les solutions des principales difficultés relatives aux examens.

IMPRIMERIE DE HUZARD-COURCIER,
Rue du Jardinet, n° 12.

PROBLÈMES
ET DÉVELOPPEMENS
SUR DIVERSES PARTIES
DES MATHÉMATIQUES;

PAR M. REYNAUD,

Examinateur pour l'admission à l'École Polytechnique et à l'École Militaire, Docteur de la Faculté des Sciences, Membre de plusieurs Académies, Chevalier des Ordres Royaux de St-Michel, de la Légion d'Honneur, etc.;

ET M. DUHAMEL,

Ancien Élève de l'École Polytechnique.



PARIS,
BACHELIER, LIBRAIRE (SUCCESSEUR DE Mme Ve COURCIER),
Quai des Grands-Augustins, n° 55.
1823.



AVIS.

Je me suis proposé, dans cet Ouvrage, de réunir en un seul volume un grand nombre de problèmes et de théorèmes, dont les uns ne se trouvent dans aucun recueil, et dont les autres sont disséminés dans différens traités français et étrangers. J'ai cherché à préparer les élèves aux concours généraux, en leur présentant les solutions des problèmes sous des formes variées propres à faire apercevoir combien le choix des inconnues influe sur l'élégance et la simplicité de ces solutions. Plusieurs problèmes sont extraits de mes Ouvrages. J'ai donné (pages 135...144) les solutions de différentes questions relatives à l'écoulement des fluides, que j'avais indiquées en 1804 dans mes Fragmens sur l'Algèbre et la Trigonométrie.

Mes occupations ne m'ayant pas permis de me livrer seul aux nombreuses recherches nécessaires à ce travail, j'ai prié M. Duhamel de vouloir bien s'adjoindre à moi, et nous avons fait en commun le choix et la rédaction des problèmes contenus dans ce Recueil.

Les considérations générales qui commencent l'Ouvrage et se terminent au n° 110, sont de M. Duhamel.

Les théories comprises depuis le n° 180 jusqu'au n° 190 et celles des n°s 221, 222, sont tirées du *Cours d'Analyse* de M. Cauchy.

Nous avons aussi extrait diverses questions de la *Théorie des Nombres* de M. Legendre, de la *Résolu-*

tion des Equations numériques de M. Lagrange, et du *Calcul des Probabilités* de M. Laplace.

La solution des problèmes proposés aux Concours généraux des Colléges royaux de Paris (pag. 381...394) nous a été donnée par M. Pommiés, officier de l'Université, professeur au Collége Charlemagne.

M. Gérono, Professeur de Mathématiques, m'a communiqué les théorèmes énoncés dans les pages 398 et 399; il a bien voulu se charger de faire l'*errata*. Les fautes indiquées, étant fort importantes, il est indispensable de les corriger avant de lire cet ouvrage.

REYNAUD.

TABLE DES MATIÈRES.

LIVRE PREMIER.

Considérations générales sur l'Arithmétique et l'Algèbre.

LIVRE II.

Considérations générales sur la Géométrie.

LIVRE III.

Considérations générales sur l'application de l'Algèbre à la Géométrie.

EXERCICES SUR LA RÉSOLUTION DES PROBLÈMES.

EXERCICES SUR LA GÉOMÉTRIE.

EXERCICES SUR L'APPLICATION DE L'ALGÈBRE À LA GÉOMÉTRIE.

FIN DE LA TABLE.

ERRATA

Pour les Problèmes et Développemens sur diverses parties des Mathématiques.

Page 16, ligne 7 en remontant, PQ'P...V; *lisez* PQ'R..V
17, 9, d'x, *lisez* d'h
17, 10, $\sqrt[n]{P^n}$, *lisez* $\sqrt[m]{P^n}$
31, 1 en remontant, moindre, *lisez* plus grand
36, 6, $-\frac{b^2}{4}$, *lisez* $+\frac{b^2}{4}$
37, 6, Dy, *lisez* Dmy
37, 10, $\frac{m^2-n^2}{am^2}$, *lisez* $\frac{am^2}{m^2-n^2}$
41, 14, suppléans, *lisez* adjacens
75, 8, inverse, *lisez* directe
96, 21, UV, *lisez* UV (fig. 4)
118, 2 en remontant $\frac{x^{m-1}+\ldots+v}{x^m+\ldots+V}$, *lisez* $\frac{x^m+\ldots+V}{x^{m-1}+\ldots+v}$
119, 18, $m=$, *lisez* (1)... $m=$
156, 17, $m+n+\ldots+k$, *lisez* $m+n+\ldots+s$
156, 1 en remontant, $\phi(mx)=m\phi(x)$. Quelques personnes n'ayant pas vu comment cette équation avait lieu quel que fût m, nous ferons observer que puisqu'en multipliant x par un nombre entier, on multiplie la fonction, réciproquement on la divisera en divisant x par un nombre entier; et par suite, si x est multiplié par une fraction $\frac{p}{q}$, la fonction le sera aussi; et de même pour m incommensurable, d'après le théorème des limites.

Faisant $y=0$ dans (1), il vient $\phi(0)=0$; et faisant ensuite $y=-x$, il vient $\phi(-x)=-\phi(x)$. Donc $\phi(-mx)=-\phi(mx)=-m\phi(x)$. Donc l'équation $\phi(mx)=m\phi(x)$ a lieu quelque valeur réelle qu'ait m.

On raisonnera de la même manière pour les problèmes suivans.

163, 2 en remontant, n, *lisez* $n\delta$
181, 7 en remontant, *lisez* $\rho(\cos\theta\pm\sqrt{-1}\sin\theta)$
226, 11, hn, *lisez* n
232, 10, $\left[\frac{f(h+n)}{f(h)}\right]$, *lisez* $\left[\frac{f(h+n)}{f(h)}\right]^{\frac{1}{n}}$
232, 13, $H^{1-\frac{1}{x}}$, *lisez* $H^{1-\frac{h}{x}}$
249, 3, AL', *lisez* BL'
261, 8, en remontant OB × OA, *lisez* OD × OC
261, 10 en remontant, OD × OC, *lisez* OB × OA

Page 291, ligne 2, au lieu de R, S, *lisez* R, S′
3, au lieu de RS, *lisez* RS′
293, 6, au lieu de A, *lisez* A′
310, 7, AD, *lisez* CD
314, 10, $-2ah^2x$, *lisez* $+2ah^2x$
321, 2, $a^2>b^2$, *lisez* $a^2>2b^2$
327, 2, p, p', *lisez* p', p'' ; $\surd$, *lisez* $2\surd$
331, 4, $+a^2$, *lisez* $-\frac{a^2}{4}$. Ligne 22, $-a$, *lisez* $-p$
331, 11, a, *lisez* $\frac{a}{2}$; $-4R^2r^2$, *lisez* $-R^2r^2$
332, 16, $-\beta^2$, *lisez* $\frac{\beta^2}{4}$
346, 18, a, *lisez* a^2
347, 8, en remontant, βxy, *lisez* $-\beta xy$
347, 7 en remontant, βx, *lisez* $-\beta x$
352, 6 en remontant, h, *lisez* b
353, 13, *lisez*

$$n'y^2+m'x^2+\left[\frac{\alpha-\beta}{\alpha}.n'+\frac{\beta-\alpha}{\beta}.m'\right]xy-n'ay-m'bx=0$$

362, 16, (fig. 154), *lisez* (fig. 153)
367, 12, A, *lisez* A (fig. 154)
367, 14, M″, *lisez* M′
374, 2 en remontant, α, *lisez* γ ; γ, *lisez* α
375, 1 en remontant, $2ba$, *lisez* $2bp$
378, 16, $1+n^2$, *lisez* $\sqrt{1+n^2}$
388, lignes 12 et 15, A^2+B^2+1, *lisez* $\sqrt{A^2+B^2+1}$

PROBLÈMES
ET DÉVELOPPEMENS
SUR LES DIVERSES BRANCHES
DES MATHÉMATIQUES.

LIVRE PREMIER.

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES SUR L'ARITHMÉTIQUE ET SUR L'ALGÈBRE.

Des Nombres en général.

1. Le *nombre* est le rapport de deux grandeurs de même espèce; il donne la mesure de l'une par rapport à l'autre considérée comme terme de comparaison et à laquelle on donne alors le nom d'*unité*.

Les nombres peuvent varier à l'infini en même temps que les grandeurs comparées, et si l'on imagine que l'unité restant constante, la grandeur à mesurer croisse d'une manière continue depuis zéro jusqu'à l'infini, son rapport à l'unité croîtra semblablement d'une manière continue, et tous les nombres auront été engendrés.

Parmi ces rapports, les plus remarquables sont ceux qui ont lieu lorsque la grandeur variable se compose exactement de parties égales à l'unité : dans ce cas, les nombres s'appellent



entiers; le plus petit est relatif à l'égalité de la grandeur à l'unité. Lorsque la grandeur est moindre que l'unité, les nombres prennent le nom de *fractions.*

L'idée des nombres entiers se ramène donc immédiatement à celle de l'égalité, qui est le plus simple de tous les rapports. Pour ramener les fractions aux nombres entiers, on conçoit l'unité et la grandeur à mesurer décomposées en parties de même grandeur; les deux nombres entiers qui en résultent sont composés l'un par rapport à l'autre de la même manière que les deux grandeurs correspondantes, et leur rapport est par conséquent le même. On exprime donc les fractions au moyen de deux nombres, dont l'un indique en combien de parties égales l'unité est divisée, et l'autre combien il y a de ces parties dans la grandeur à mesurer.

Mais il pourrait se faire que cette dernière n'eût pas de commune mesure avec l'unité; c'est-à-dire qu'il n'existât pas de grandeur, si petite qu'elle fût, qui fût contenue exactement dans elle et dans l'unité; c'est ce qui arrive quand on veut évaluer le rapport du côté d'un carré à sa diagonale. Dans ce cas le rapport des nombres entiers ne donne qu'une approximation; mais elle peut être aussi grande qu'on veut : car en partageant l'unité en parties de plus en plus petites et les portant sur la grandeur à mesurer, le reste sera toujours moindre qu'une de ces parties, et pourra par conséquent devenir moindre que toute grandeur donnée; le rapport qu'on obtiendra en négligeant ce reste pourra donc approcher autant qu'on voudra du véritable.

2. Les nombres sont d'un usage continuel dans la vie; ils servent à donner l'idée des grandeurs qu'on ne peut montrer aux yeux et qui ne sauraient alors être déterminées autrement que par leur rapport avec d'autres que l'on connaît. Dans tous les cas de ce genre, l'emploi des nombres est indispensable; mais il est encore de la plus grande utilité lors même que l'on pourrait montrer les choses dont on veut donner la connaissance. La première raison en est que l'idée des nombres n'est point soumise aux erreurs des sens comme l'estimation par l'œil et le toucher, et qu'ils sont par conséquent plus propres que toute

autre chose à donner une notion exacte des grandeurs en les rapportant à une seule bien connue : la seconde raison est qu'il faudrait connaître d'une manière absolue toutes les grandeurs de chaque espèce, ce qui surchargerait la mémoire d'une quantité prodigieuse de noms et d'images, sans qu'on pût encore s'élever jusqu'à l'idée de grandeurs que l'on n'aurait pas vues et parfaitement retenues dans son esprit. En déterminant au contraire les quantités par leurs rapports à d'autres connues, on n'a besoin que d'étudier les nombres une fois pour toutes, et de connaître une seule grandeur de chaque espèce d'une manière absolue.

Pour distinguer les nombres, il a fallu les représenter par des *signes* différens. Ceux au moyen desquels les hommes se communiquent le plus habituellement leurs pensées étant la parole et l'écriture, on a exprimé les nombres par des mots et des *caractères*; ce qui constitue la théorie de la numération.

De la Numération.

3. De même qu'on avait rapporté les grandeurs à d'autres grandeurs connues de même espèce, on a pensé qu'il serait avantageux de rapporter les nombres à d'autres connus d'avance et choisis de manière que ce rapport fût toujours plus simple que le nombre à exprimer. Commençons par considérer à cet effet les nombres entiers.

Les termes de comparaison ont été choisis parmi les nombres entiers, comme plus simples que tous les autres : de plus on les a pris constans, parce que devant être tout-à-fait familiers, il fallait restreindre leur nombre le plus possible. Enfin on a établi le même rapport entre l'un quelconque de ces termes et le suivant, afin que le passage de l'un à l'autre se fît au moyen de la même idée de pluralité, ce qui soulageait à la fois la conception et la mémoire. Le premier terme de comparaison devait être le nombre un, comme formant tous les nombres entiers en s'ajoutant à lui-même ; quant au rapport entre deux termes consécutifs, il restait arbitraire ; il a été choisi égal à dix, probable-

ment parce que les hommes ont commencé par compter avec leurs doigts.

Ces termes de comparaison une fois connus et devenus familiers, rien n'était plus facile que d'exprimer par leur moyen tous les nombres entiers. En effet, imaginons un nombre quelconque, et concevons-le décomposé en dixaines; il y en aura un nombre quelconque, plus des unités en nombre moindre que dix : s'il y a plus de dix dixaines, décomposons-les en groupes de dix, c'est-à-dire en centaines; le nombre des dixaines restantes sera encore moindre que dix. En continuant ainsi, on arrivera à un point où le nombre des unités de la plus forte espèce sera moindre que dix, et le nombre total sera exprimé en unités simples, dixaines, centaines, etc.; chacun de ces termes de comparaison sera en nombre moindre que dix, et n'exigera par conséquent que la conception de neuf pluralités différentes, et le souvenir de neuf mots pour les représenter.

Nous ajouterons que le nombre des termes de comparaison sera fort petit et que six ou sept suffiront pour les plus grands calculs dont la vie sociale offre des applications.

4. Ayant ainsi donné la conception et la nomenclature des nombres, il restait à les écrire de la manière la plus propre à leur calcul. On pouvait faire usage à cet effet de l'écriture ordinaire; mais elle se serait prêtée difficilement aux calculs, et on a eu recours à divers procédés dont nous ferons connaître d'abord le plus simple; il se déduit immédiatement de la nomenclature que nous venons d'exposer, et est maintenant presque universellement employé. Ayant observé que dans la décomposition des nombres en dixaines, centaines, etc., il ne pouvait jamais y avoir plus de neuf unités de chaque espèce, on pensa qu'il était possible de représenter toutes ces parties au moyen de neuf signes qui désignassent les nombres depuis un jusqu'à neuf, et d'une notation qui fît connaître l'ordre d'unités représenté dans chaque cas par ces divers signes. On est convenu de désigner cet ordre par celui dans lequel les signes seraient écrits, de telle sorte que le premier à droite marquerait les unités, le second les dixaines, le troisième les centaines, et ainsi de suite. Mais,

comme il peut arriver que dans certains nombres il ne se trouve pas d'unités de l'un des ordres intermédiaires entre le premier et le dernier, on a inventé un nouveau signe qui ne représente aucun nombre, et dont le seul office est de remplacer les ordres qui manquent, afin que les signes à leur gauche soient au rang qui, d'après la convention, doit correspondre à leur valeur. Ces dix signes se nomment *chiffres* et sont 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

La numération écrite des *Romains* était différente de celle-ci, qui nous vient des *Arabes*. Ils représentaient d'une manière fort irrégulière certains nombres par des lettres de l'alphabet, et se servaient d'une décomposition très variable pour l'expression de tous les autres nombres. La convention qui sert de base à ce système consiste en ce que les valeurs indiquées par deux lettres consécutives doivent être ajoutées quand celle de droite marque un nombre plus faible que celle de gauche, et retranchées dans le cas contraire; nous n'insisterons pas sur un procédé aussi irrégulier et aussi incommode, dont on ne se sert jamais pour les calculs, et qu'on n'emploie guère que d'une manière isolée dans l'expression des numéros.

Les *Grecs* avaient choisi neuf lettres pour représenter les neuf premiers nombres; ils les affectaient d'un accent pour leur faire marquer des dixaines, de deux pour les centaines, et ainsi de suite : de plus, ils les écrivaient dans l'ordre où ils devaient être lus, c'est-à-dire dans le même ordre que nous. Leur système ne différait donc du nôtre que par l'omission du zéro, au moyen duquel la place des lettres aurait suffi pour indiquer l'espèce de leurs unités, et aurait rendu les accens inutiles. Quelquefois aussi, les lettres représentaient les nombres d'après le rang qu'elles occupaient dans l'alphabet, ce qui n'était pas en opposition avec le système précédent, où les neuf premiers nombres étaient représentés par les neuf premières lettres. Il paraît qu'ils se servaient de ce procédé comme nous des chiffres romains : les chants de l'Iliade sont numérotés au moyen des lettres consécutives de l'alphabet grec.

Nous laisserons tous ces systèmes pour ne plus considérer que le premier, qui est le seul employé dans le calcul.

5. Les nombres entiers étant nommés et représentés par l'écriture, il ne reste plus qu'à s'occuper des fractions. Nous avons déjà fait connaître d'une manière générale le moyen qu'on emploie à cet effet, et qui consiste dans la décomposition de l'unité et de la grandeur à mesurer en parties égales. Cette décomposition peut se faire d'une infinité de manières, parmi lesquelles on choisit de préférence la suivante, comme plus commode dans les calculs compliqués. On conçoit l'unité décomposée en dix parties égales, et on cherche combien il y en a dans la grandeur à mesurer; si l'on trouve un reste moindre que le dixième de l'unité, on conçoit semblablement ce dixième décomposé en dix parties égales, dont chacune sera par conséquent le centième de l'unité principale; et on voit combien il s'en trouve dans le reste; si les centièmes ne suffisent pas pour la mesure complète de la grandeur, on continue indéfiniment la subdivision décimale des unités successives. Quant à l'expression de la fraction par l'écriture, il est facile de voir que les unités d'un ordre quelconque ne pouvant être en nombre supérieur à neuf, les dix chiffres suffiront pour les représenter, et qu'il ne restera qu'à faire connaître l'ordre des unités représentées, et pour cela on est convenu de placer les dixièmes à la droite des unités, les centièmes à la droite des dixièmes, et ainsi de suite; de sorte que le rapport de deux unités consécutives, tant dans la partie entière que dans la partie fractionnaire, fût toujours dix : on est convenu en outre que le chiffre des unités se reconnaîtrait par une virgule mise à sa droite.

Cette manière d'écrire les fractions offre de l'avantage dans les calculs un peu compliqués, mais elle a l'inconvénient de ne donner souvent que par approximation des nombres que l'on aurait pu avoir exactement au moyen d'une autre décomposition.

Lorsqu'on emploie une décomposition quelconque de l'unité, on écrit les deux nombres qui indiquent combien il y a de parties dans l'unité et dans la grandeur à mesurer; le premier se met au-dessous de l'autre et on les sépare par un trait.

Quelquefois, pour exprimer une fraction, on décompose

l'unité en parties égales, et celles-ci en d'autres quelconques, auxquelles on donne des noms qui n'indiquent nullement leur rapport à l'unité primitive; ces sortes de nombres se nomment *complexes*, et c'est surtout pour éviter les longueurs que leur calcul entraîne, que l'on a adopté la subdivision décimale des grandeurs. On choisissait ordinairement une décomposition qui se prêtât commodément aux détails du commerce; par exemple, on décomposait la livre poids en 16 onces, parce qu'on pouvait ainsi en prendre la moitié, le quart, le huitième, le seizième, ce qu'on ne peut faire d'après la décomposition décimale; mais malgré cet inconvénient, la division décimale offre des avantages qui doivent lui mériter la préférence.

On avait cherché à réunir les deux avantages, en changeant la base du système de numération et prenant 12 au lieu de 10; alors les subdivisions des mesures auraient pu être à la fois commodes au calcul et au commerce; mais la difficulté d'introduire dans toutes les classes de la société une manière différente de compter et de se faire idée des nombres a fait renoncer à cette entreprise, et l'on a conservé la base dix.

Des Unités de différente espèce.

6. Ayant ainsi déterminé de quelle manière on composerait et décomposerait l'unité pour l'expression de toutes les grandeurs en nombres, il ne restait plus qu'à fixer la grandeur absolue de cette unité pour toutes les espèces de quantités. Il était important d'abord que cette unité fût la même pour tous les peuples, afin d'éviter les erreurs que pouvait causer la similitude des noms attribués à des choses différentes, ou les calculs nécessaires pour convertir ces unités les unes dans les autres. Il était utile encore que l'unité de chaque espèce pût toujours se retrouver, si elle disparaissait, et pour cela qu'elle eût un rapport connu avec une grandeur invariable; on a choisi à cet effet un méridien terrestre; on a partagé le quart de sa circonférence en dix millions de parties égales; l'une d'elles a été choisie pour unité de longueur et nommée *mètre*.

Cela posé, il ne restait plus qu'à rapporter au mètre toutes les autres unités. Les *surfaces* et les *volumes* s'y sont ramenés immédiatement en prenant pour leurs unités respectives le carré et le cube qui auraient pour côté un mètre ou toute autre longueur qui eût un rapport décimal simple avec le mètre.

Pour y rapporter les *poids*, on a choisi pour unité le poids d'un centimètre cube d'eau distillée prise dans le vide et à son maximum de densité; ces conditions rendant cette unité invariable remplissent l'objet qu'on s'était proposé.

Quant au temps, on a trouvé plus naturel de faire dépendre sa mesure du mouvement de la terre qui, outre les avantages dont nous venons de parler, avait encore celui de l'application la plus commode aux besoins de la vie.

Moyens d'obtenir la généralité dans les résultats.

7. La résolution de toutes les questions qu'on peut proposer sur les nombres se ramène à un petit nombre d'opérations simples qui, par les diverses combinaisons qu'on en peut faire, servent d'élémens à toutes les autres. Les opérations se reproduisant à chaque instant sur des nombres différens, il faut déterminer pour chacune d'elles une marche générale indépendante des valeurs particulières de ces nombres, afin de ne pas recommencer les recherches pour chaque cas particulier. Dans les premières opérations, la décomposition uniforme des nombres a suffi pour en déduire des règles générales; mais dès qu'elles se sont un peu compliquées, on a eu besoin de démontrer des propriétés générales sur les nombres, même pour résoudre des questions particulières, afin qu'étant sûr qu'elles s'appliquaient aux nombres inconnus, on pût combiner ceux-ci avec les *données*, et en déduire leurs valeurs.

On observera pour cela que si l'on résolvait une question sur des nombres particuliers, sans dénaturer ces nombres par aucune réduction, ils se retrouveraient tous dans le résultat, et combinés entre eux d'une manière qui ne dépendrait que de la

nature de la question et nullement des valeurs qu'on leur avait supposées. Le résultat s'appliquerait donc à toutes les questions de même nature, qui ne différeront que par la valeur des *données*; il apprendra comment il faut combiner ces *données*, quelles qu'elles soient, pour former les valeurs des inconnues. Ce résultat sera donc général.

Par exemple, pour découvrir la composition générale du carré de la somme de deux nombres, on en prendra deux arbitraires, 7 et 4, et on multipliera 7 plus 4 par 7 plus 4, ce qui donnera 7 fois 7, plus deux fois le produit 7 fois 4, plus 4 fois 4 ; cela apprend que le carré de la somme de deux nombres contient toujours le carré du premier nombre, plus le double produit du premier par le second, plus le carré du second.

Ce procédé ne laisserait rien à désirer s'il était d'une application commode; mais il exigerait qu'on s'interdît toute réduction, toute abréviation dans l'écriture, car on risquerait d'introduire par là des nombres qui fussent déjà dans les données; on pourrait alors les confondre dans le résultat, et on ne saurait plus s'ils sont constans ou variables d'une question dans l'autre : ainsi, dans le cas précédent, la réduction de deux termes égaux a produit le nombre deux; la simplicité de la question aurait empêché de le confondre avec les données s'il y en avait eu d'égales à deux; mais dans des questions plus compliquées, il pourrait y avoir des inconvéniens, et l'on a renoncé à ce moyen.

La difficulté venant uniquement de ce que les nombres pris pour représenter les données avaient des valeurs particulières qui pouvaient se reproduire par la combinaison de ces mêmes données; observant d'ailleurs que l'emploi de ces nombres n'avait d'autre objet que de fixer les idées et de distinguer les nombres qui entraient dans la question, on a imaginé de les remplacer par des signes quelconques qui, ne désignant aucun nombre particulier, ne pussent être confondus avec ceux qui naîtraient du calcul. Ces signes sont les lettres de l'alphabet; on les a choisies parce qu'elles étaient simples et déjà connues.

8. Il résulte de ces observations que pour résoudre d'une manière générale une question sur des nombres, il suffit de les représenter par des lettres, et d'agir comme si l'on traitait un cas particulier : le résultat auquel on parviendra, indiquera, par sa forme, de quelle manière il faut combiner les données, dans chaque cas particulier, pour former le résultat correspondant.

Ainsi, pour trouver la loi du produit de la somme de deux nombres quelconques par leur différence, on représentera ces deux nombres par les lettres a, b, et multipliant a plus b par a moins b, on trouvera pour produit a fois a, moins b fois b, qui apprend que le produit est toujours la différence des carrés des deux nombres donnés.

Enfin, on a introduit le plus grand degré de simplicité dans les calculs, en indiquant toutes les opérations par les signes $+$, $-$, etc., qui signifient *plus*, *moins*, etc., et désignent l'addition, la soustraction, etc.

Cette méthode peut être employée dans tous les cas où le résultat est décomposable en parties dont la composition se ramène à des principes connus. Mais il arrive souvent que cette décomposition est impraticable, comme, par exemple, dans le cas des nombres *incommensurables*, c'est-à-dire qui n'ont pas de commune mesure avec l'unité. On sera alors obligé de recourir à d'autres procédés, et tout ce qui y est relatif se déduira, comme application, d'une méthode générale que nous allons exposer.

Méthode des limites.

9. Lorsqu'on veut trouver la relation qui existe entre des quantités qui, par leur nature, ne peuvent être facilement comparées, on leur en substitue d'autres qui soient susceptibles de se prêter avec commodité au calcul, et qui puissent approcher autant qu'on voudra des quantités proposées, qui pour cette raison sont appelées leurs *limites*. Il ne reste plus ensuite qu'à déduire la relation des limites, de celle qui a con-

stamment lieu entre les variables, et l'unique objet de la méthode est d'indiquer un moyen général d'opérer ce passage. Or, on démontre facilement que ces deux relations sont identiques; de sorte que, connaissant celle qui existe entre les variables, il suffit pour avoir celle que l'on cherche, de substituer à ces variables leurs limites.

En effet, soit $A=B$ la relation entre les variables (A et B renferment ces quantités d'une manière quelconque et varient en même temps qu'elles); désignons par A' et B' les valeurs vers lesquelles elles tendent à mesure que les variables tendent vers leurs limites; je dis que l'on aura $A'=B'$. Car soit, s'il est possible, $A'>B'$; si les variables A et B restent toujours au-dessous de leurs limites, on pourra amener A assez près de A' pour surpasser B'; et comme on a toujours $B=A$, il s'ensuivrait que B aurait surpassé B'; ce qui est contraire à l'hypothèse. Si A et B décroissaient en s'approchant de leurs limites, on pourrait semblablement amener B entre A' et B', ce qui conduirait à la même absurdité; on a donc $A'=B'$. Or, A' et B' sont ce que deviennent A et B quand les variables qui y entrent ont atteint leurs limites. Donc on obtient la relation entre celles-ci en les substituant aux variables correspondantes dans leur relation.

Tout l'artifice de la méthode consistera donc dans le choix des variables auxiliaires. Il faudra les prendre de manière qu'elles se prêtent le plus commodément possible aux comparaisons, et telles surtout qu'elles aient pour limites les quantités proposées.

10. De cette méthode générale, on peut déduire, comme application particulière, la théorie des incommensurables. Car nous avons vu qu'il est possible d'approcher indéfiniment d'un nombre incommensurable quelconque au moyen de nombres commensurables; et en combinant cette propriété avec le principe précédent, il en résulte ce théorème qui sert de fondement à la théorie des incommensurables, savoir : que

Toute relation qui a lieu entre des nombres quelque valeur commensurable qu'ils aient, a lieu encore lorsqu'ils deviennent

incommensurables, car ils peuvent être considérés comme des limites de nombres commensurables; et la relation des limites est la même que celle des variables.

Proposons-nous, par exemple, de prouver la généralité de ce théorème que le produit de deux nombres est le même dans quelque ordre qu'on l'effectue. On le démontre facilement dans le cas où les deux facteurs sont entiers ou fractionnaires, et il ne reste plus qu'à considérer le cas des incommensurables. Soient a et b les deux nombres incommensurables, et a', b', deux nombres commensurables qui s'approchent indéfiniment de a et b. On aura toujours, d'après ce qui précède, $a'b'=b'a'$. La relation des limites devant être la même, on en conclut $ab=ba$.

On raisonnerait semblablement dans l'extension de tout autre théorème au cas des incommensurables.

Méthode de résolution des Problèmes.

11. Presque tous les problèmes reviennent à déterminer certains nombres d'après des relations qu'ils doivent avoir avec d'autres nombres donnés. Dans ces questions, la marche qu'on suit ordinairement consiste à transformer d'abord les relations données en des relations d'égalité entre les nombres donnés et inconnus, ce qui s'appelle *mettre le problème en équation;* puis à transformer ces égalités en d'autres qui expriment immédiatement les valeurs des inconnues, c'est-à-dire à *résoudre les équations.* Tout consiste donc dans des transformations de rapports, et il ne reste plus qu'à montrer comment on peut les effectuer dans tous les cas; considérons d'abord la première partie, c'est-à-dire la mise en équation.

Supposons que l'on ait d'abord analysé l'énoncé du problème et étudié toutes les relations qui doivent avoir lieu entre les quantités connues et inconnues : si la question est alors bien comprise, on doit être en état de vérifier si des nombres donnés y satisferaient. Or, toute vérification exige, en dernière analyse une comparaison entre des choses qui doivent se trou-

ver identiques, ou différer d'une certaine manière connue d'où il suit que si l'on représente les inconnues par des signes quelconques, et qu'on indique sur elles et les quantités connues la suite des opérations par lesquelles il faudrait faire la vérification, on parviendra à des relations d'égalité ou d'inégalité entre les nombres tant connus qu'inconnus qui entrent dans l'énoncé. Il arrive quelquefois que le passage par les relations d'égalité rend la solution plus longue, et alors on devra s'en dispenser : mais dans le plus grand nombre de cas les inconnues sont tellement combinées avec les données, qu'il ne serait pas possible de les déterminer sans avoir recours aux procédés généraux que fournit la théorie des égalités, ou des inégalités qui s'y ramènent immédiatement en augmentant le plus petit membre d'une quantité indéterminée.

12. Ayant ainsi déterminé les égalités ou *équations* qui ont lieu entre les données et les inconnues, il ne reste plus qu'à en déduire celles-ci; et la marche à suivre à cet effet dépend de la forme des équations. Pour donner la théorie générale de leur résolution, on les a partagées par classes dans chacune desquelles on a rassemblé toutes celles auxquelles la même marche était applicable; on les a rassemblées sous une même forme générale sur laquelle on a fait le calcul de la résolution, et l'on en a déduit la forme générale du résultat, c'est-à-dire la manière dont il faut combiner les données pour obtenir les valeurs des inconnues. Un pareil résultat se nomme une *formule*.

On aurait pu représenter tous les systèmes possibles d'équations du même degré par un seul système général; mais la résolution de ce dernier serait d'une difficulté insurmontable, et on y a renoncé depuis long-temps. D'ailleurs, les formules qu'on en déduirait seraient tellement incommodes dans les applications qu'on serait toujours obligé de recourir aux méthodes relatives à des cas particuliers. C'est ce que l'on peut voir dans des cas même très simples par rapport à celui d'une résolution générale des équations : en ne supposant qu'une seule inconnue qui n'entrerait qu'au troisième degré, la formule ne

peut déjà plus être appliquée directement, et l'on peut prévoir ce qui arriverait si l'on avait un nombre quelconque d'inconnues entrant à des *degrés* quelconques.

Nous examinerons successivement par la suite chacune des classes dans lesquelles on a partagé les équations, et nous chercherons à lever autant que possible les difficultés que leur résolution pourrait offrir aux élèves.

Des propriétés particulières des nombres.

13. Dans ce qui précède, nous avons considéré les nombres indépendamment de leurs valeurs particulières; mais ils jouissent d'une foule de propriétés curieuses dépendantes de la manière dont ils sont composés avec l'unité ou les uns avec les autres. L'ensemble de ces propriétés constitue ce qu'on a nommé la *théorie des nombres*. Les méthodes qu'on y emploie pour la résolution des questions sont tellement particulières, qu'il serait impossible d'indiquer une marche générale qui pût guider dans ces sortes de recherches. Nous en présenterons quelques-unes comme exemples de ce genre d'analyse, et nous renverrons, pour de plus grands détails, aux ouvrages de MM. *Legendre* et *Gauss*.

De la manière de simplifier certaines opérations sur les Nombres.

14. Lorsqu'on est conduit à effectuer des multiplications, des divisions, des élévations à des puissances, et des extractions de racines sur des nombres qui sont des puissances d'un degré connu, soit entier, soit fractionnaire, d'une même quantité, rien n'est plus facile que de trouver par une opération plus simple quel est le degré qui correspond au résultat. On sait, par exemple, que celui du produit est la somme des degrés des facteurs, celui du quotient leur différence, etc.

On a pensé en conséquence que si l'on pouvait transformer tous les nombres en puissances d'une même *base* quelconque,

et former une *table* qui, à côté de chaque nombre, présentât le degré de la puissance correspondante, les quatre opérations fondamentales dont nous avons parlé se trouveraient abaissées, parce que l'on se bornerait à calculer le degré correspondant au résultat, et la table ferait connaître par suite la valeur même de ce résultat. On a reconnu facilement qu'il était suffisant de faire ce calcul pour les nombres entiers, puisque toutes les opérations s'y ramènent toujours; et même on n'a eu de recherches pénibles que pour les *nombres premiers*, vu que les degrés correspondans aux autres s'en déduisent immédiatement.

Telle est l'idée fondamentale de la théorie des *logarithmes* ou des degrés correspondans aux nombres; elle en fait connaître le véritable esprit, et il ne reste plus qu'à en faire des applications.

Théorie des Fonctions dérivées.

15. Les développemens que prennent les fonctions quand on fait varier les quantités dont elles dépendent, présentent des considérations de la plus haute importance dans l'analyse. Nous allons exposer les élémens de cette théorie, dont on verra de nombreuses applications, soit dans l'Algèbre pure, soit dans ses applications à la Géométrie.

Lorsque dans une fonction $f(x)$ la variable x devient $x+h$; h étant une indéterminée quelconque, on appelle fonction dérivée de $f(x)$, le coefficient de la première puissance d'h dans le développement de $f(x+h)$ suivant les puissances entières positives et croissantes de h. Réciproquement celle-ci, considérée par rapport à sa dérivée, s'appelle fonction primitive.

Nous allons d'abord nous occuper de déterminer les fonctions dérivées des fonctions algébriques.

16. Soit la fonction Ax^m, dans laquelle on suppose m entier et positif.

Quand x devient $x+h$, elle devient $A(x+h)^m$. Or, en multipliant m facteurs égaux à $x+h$, les termes du premier degré en h sont de la forme $x^{m-1}h$ et au nombre de m, la dérivée

de Ax^m est donc Amx^{m-1}, et le terme indépendant d'h est la fonction proposée Ax^m.

17. Soit le polynome $Ax^m + Bx^n + Cx^p +$ etc.

Le coefficient total de h étant la somme des coefficiens fournis par chacun des termes Ax^m, Bx^n, etc., la dérivée du polynome sera la somme des dérivées de chaque terme et égale à..... $mAx^{m-1} + nBx^{n-1} + pCx^{p-1} +$ etc.

Le terme indépendant d'h est encore la fonction proposée $Ax^m + Bx^n +$ etc.

S'il y avait dans le polynome proposé un terme indépendant d'x, il ne fournirait pas de coefficient pour h. C'est ce que l'on énonce en disant que la dérivée d'une constante est zéro.

18. Soit le produit PQRS...V, les facteurs P, Q...V étant des fonctions d'x dont on connaît les dérivées représentées par P′, Q′...V′. Lorsque x deviendra $x + h$, cette fonction sera le produit des développemens suivans :

$$\begin{array}{l} P + P'h + \alpha h^2 \ldots\ldots \\ Q + Q'h + \beta h^2 \ldots\ldots \\ R + R'h + \gamma h^2 \ldots\ldots \\ \quad\vdots \\ V + V'h + \mu h^2 + \ldots \end{array}$$

Le terme indépendant d'h sera encore la fonction proposée PQ...V, et le terme en h au premier degré aura pour coefficient

$$P'QR\ldots V + PQ'P\ldots V + PQR'\ldots V + \ldots\ldots + PQR\ldots V';$$

d'où l'on déduit cette règle que, pour avoir la dérivée d'un produit, il faut prendre respectivement les dérivées de chaque facteur, les multiplier par tous les autres facteurs, et faire la somme de ces produits.

Si les facteurs, P, Q, R, étaient égaux et en nombre m, leur produit deviendrait P^m, et sa dérivée se réduirait à $mP^{m-1}P'$.

19. Soit la fraction $\frac{P}{Q}$, P et Q étant des fonctions d'x dont on connaît les dérivées. La fraction devient pour $x+h$

$$\frac{P + P'h + \alpha h^2 \ldots}{Q + Q'h + \beta h^2 \ldots}.$$

En faisant la division, on trouve pour terme indépendant $\frac{P}{Q}$, et pour coefficient d'h ou pour dérivée $\frac{P'Q - PQ'}{Q^2}$.

20. Soit l'expression radicale $\sqrt[m]{P^n}$, P étant une fonction quelconque dont on connaît la dérivée P'. On aura à extraire la racine $m^{ième}$ de $(P+P'h+\text{etc.})^n$, ou de $P^n+nP^{n-1}P'h+Kh^2+\text{etc.}$;

ce qui donne pour terme indépendant d'x, $\sqrt[m]{P^n}$, et pour dérivée

$$\frac{nP^{n-1}P'}{m\{\sqrt[m]{P^n}\}^{m-1}} \quad \text{ou} \quad \frac{n}{m}P^{\frac{n}{m}-1}P'.$$

La même loi existe donc pour la puissance fractionnaire $P^{\frac{n}{m}}$ que pour les puissances entières.

Soit $\frac{1}{P^m}$ ou P^{-m}. Cette fonction est un cas particulier de $\frac{P}{Q}$ et donne pour dérivée $\frac{-mP^{m-1}P'}{P^{2m}}$ ou $-mP^{-m-1}P'$; ce qui fournit encore la même loi pour les puissances négatives que pour les positives; savoir, que la dérivée s'obtient toujours en multipliant l'exposant par la puissance dont on diminue le degré de l'unité et par la dérivée de la racine, puis enfin par le coefficient indépendant.

21. Soit plus généralement la fonction F(P), P étant une fonction connue d'x désignée, par exemple, par $\phi(x)$, les signes F, ϕ, indiquant des fonctions dont on sait trouver les dérivées par rapport aux quantités qu'ils affectent. On demande la dérivée de F(P) par rapport à x, c'est-à-dire le coefficient de h dans le développement que prend F(P) quand x devient $x+h$.

P ou $\phi(x)$ devient alors $\phi(x) + \phi'(x)h + \alpha h^2 + \ldots$ que nous représenterons par $\phi(x) + k$.

F(P) devient $F(P + k)$, et donne un développement de la forme $F(P) + F'(P)k + \beta k^2 + \ldots$; remplaçant k par sa valeur $\phi'(x)h + \alpha h^2 +$ etc., on voit que le terme en h au premier degré sera $F'(P) \times \phi'(x)$, et le terme indépendant F(P).

22. Soit F(P), et supposons, $P = \phi(Q)$, $Q = F(R)$, $R = \psi(x)$. En faisant les mêmes raisonnemens que dans le cas précédent, on trouvera facilement que la dérivée de F(P) par rapport à x est

$$F'(P) \times \phi'(Q) \times F'(R) \times \psi'(x).$$

Ce qui apprend que *pour avoir la dérivée d'une fonction de fonctions, quel que soit le nombre des indices accumulés, il faut prendre la dérivée de chaque fonction par rapport à la quantité qui lui est immédiatement soumise et multiplier ensemble toutes ces dérivées.*

23. Soit une fonction de deux fonctions d'x, P et Q, désignée par F(P, Q), on peut trouver sa dérivée par rapport à x lorsqu'on connaît celles de P, Q, et celle relative à l'indice F. Supposons pour cela qu'on fasse d'abord la substitution de $x + h$ seulement dans P, on aura le développement

$$F(P, Q) + F'(P)P'h + \alpha h^2 \ldots.$$

Substituant dans ce développement $x + h$ dans Q, le premier terme F(P, Q) deviendra

$$F(P, Q) + F'(Q)Q'h + \beta h^2 \ldots.$$

Le second $F'(P)P'h$ donnera pour seul terme en h le premier de son développement qui sera lui-même; de sorte que la dérivée de la fonction proposée F(P, Q) sera

$$F'(P)P' + F'(Q)Q'.$$

Mais il faut bien observer que F'(P) désigne la dérivée de F(P, Q), en n'y considérant que P comme variable, et de même F'(Q) celle de F(P, Q), en ne faisant varier que Q.

Si l'on avait un plus grand nombre de fonctions composantes, on agirait de la même manière, et l'on conclut cette règle générale, que

Pour avoir la dérivée d'une fonction composée de plusieurs autres P, Q, R, etc *il faut prendre la dérivée par rapport à chacune d'elles; en considérant les autres comme constantes, les multiplier respectivement par les dérivées des fonctions,* P, Q, R, etc., *par rapport à* x, *et faire la somme de ces produits.*

La dérivation des fonctions

$$PQ\ldots V, \frac{P}{Q}, P+Q+R+\text{etc.},$$

n'est qu'un cas particulier de cette loi générale.

Nous allons maintenant passer aux fonctions implicites.

24. Problème. *Trouver la dérivée d'une fonction inconnue* y, *quand on connaît une équation entre elle et la variable* x.

Soit l'équation donnée $F(x,y)=0$.

Si l'on connaissait la valeur d'y en x, en la mettant dans $F(x,y)$, on aurait identiquement $0=0$. La fonction d'x résultante de la substitution, étant nulle quel que soit x, le sera quel que soit h, si l'on change x en $x+h$; et par conséquent tous les termes du même degré en h se détruiront. Il suit de là que la dérivée de $F(x,y)$, par rapport à x, doit être nulle quand on considère y comme la fonction d'x qui serait tirée de $F(x,y)=0$. Or nous savons dériver la fonction composée $F(x,y)$ par rapport à x, et nous obtiendrons ainsi $F'(x)+F'(y)y'$, en désignant par y' la dérivée inconnue d'y par rapport à x et par $F'(x)$, $F'(y)$ les dérivées partielles de $F(x,y)$ par rapport à x ou y considérées successivement comme seules variables.

Cette dérivée devant être nulle, on en tire

$$y'=-\frac{F'(x)}{F'(y)}.$$

Corollaire. Si l'on connaît la dérivée d'une fonction y par rapport à x, on en peut déduire celle de x par rapport à y, car on a alors l'équation $y-\phi(x)=0$, qui, d'après la formule pré-

cédente, donne

$$x' = \frac{1}{\varphi'(x)};$$

ce qui fait voir que les dérivées de deux fonctions l'une par rapport à l'autre sont *réciproques*.

25. Problème. *Connaissant* (m — 1) *équations entre* m *variables, trouver les dérivées de* (m—1) *d'entre elles par rapport à l'autre.*

Soient les équations

$$F_1(x, y, z \ldots u) = 0,$$
$$F_2(x, y, z \ldots u) = 0,$$
$$\vdots$$
$$F_{m-1}(x, y, z \ldots u) = 0.$$

On demande les dérivées de $y, z, \ldots u$, par rapport à x. Concevons pour cela qu'on connaisse les fonctions d'x que ces équations donneraient pour $y, z, \ldots u$; en les reportant on aurait des équations où tous les termes en x se détruiraient identiquement. Si donc on y remplaçait x par $x+h$, tous les termes se détruiraient encore, de sorte que les coefficiens des diverses puissances de h seraient identiquement nuls. Les dérivées, qui sont les coefficiens de la première puissance d'h dans chacune de ces fonctions, seront donc nulles. D'où il suit qu'en considérant $y, z, \ldots u$, comme les fonctions d'x données par les équations $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, etc., les dérivées des premiers membres de ces équations seront identiquement nulles; de sorte que l'on aura

$$F'_1(x) + F'_1(y)y' + F'_1(z)z' \ldots + F'_1(u)u' = 0,$$
$$F'_2(x) + F'_2(y)y' + F'_2(z)z' \ldots + F'_2(u)u' = 0,$$
$$\vdots$$
$$F'_{m-1}(x) + F'_{m-1}(y)y' \ldots\ldots + F'_{m-1}(u)u' = 0,$$

$y', z', \ldots u'$ désignant les dérivées de $y, z, \ldots u$, par rapport à x, et $F'_1(x)$, $F'_1(y)$, etc., les dérivées partielles de.....

$F_1(x, y, \ldots u)$, etc., en ne considérant comme variable que la quantité mise entre les parenthèses.

De ces $m-1$ équations du premier degré, on déduira $y', z', \ldots u'$.

26. Problème. *Connaissant* m—2 *équations entre* m *variables, trouver les fonctions dérivées partielles de* m—2 *de ces variables par rapport aux deux autres* x, y.

Ce problème rentre dans le précédent, puisqu'il suffira de considérer successivement x et y comme constans; ce qui ramène à une seule variable indépendante.

Il en serait de même pour $m-n$ équations entre m variables.

27. Remarque. Les fonctions dérivées peuvent elles-mêmes être dérivées par rapport à la même variable, et leur première dérivée est nommée la seconde de la fonction primitive; la dérivée de cette seconde est la troisième dérivée de la fonction primitive; et ainsi de suite.

La formation de ces dérivées successives ne saurait souffrir la moindre difficulté d'après ce qui précède, tant pour les fonctions explicites qu'implicites.

28. Problème. *Etant donnée une fonction dérivée d'un certain ordre, trouver la fonction primitive.*

La résolution de ce problème inverse n'est pas susceptible de la même généralité que le direct; les procédés à suivre dépendent de la forme particulière des fonctions et ne s'étendent même qu'à un très petit nombre. Nous nous bornerons à considérer les polynomes sans dénominateurs polynomes. Tous les termes seront alors de la forme Ax^m, m étant entier ou fractionnaire, positif ou négatif. Or la fonction dont la dérivée est Ax^m est évidemment $\frac{Ax^{m+1}}{m+1}$, et ce sera la fonction primitive si Ax^m est la première dérivée; dans le cas contraire, on remontera de la même manière par un nombre d'opérations égal au rang de cette dérivée. On agira semblablement pour tous les termes du polynome.

Il faudra observer seulement d'ajouter une constante arbitraire à chaque opération, parce que non-seulement $\frac{Ax^{m+1}}{m+1}$,

mais encore $\frac{Ax^{m+1}}{m+1}+C$, donneront pour dérivée Ax^m, si C est indépendant d'x, puisqu'alors sa dérivée est zéro.

Par exemple, si l'on demande la fonction primitive dont la seconde dérivée est Ax^m, on aura pour la première dérivée $\frac{Ax^{m+1}}{m+1}+C$, et pour fonction primitive

$$\frac{Ax^{m+2}}{(m+1)(m+2)}+Cx+C',$$

C et C' étant deux constantes arbitraires.

En général la fonction primitive contiendra un nombre de constantes arbitraires marqué par l'ordre de la dérivée proposée.

Des fractions qui par une hypothèse particulière se réduisent à $\frac{0}{0}$.

29. Il arrive souvent qu'en attribuant une valeur particulière à une lettre dans une expression fractionnaire, on la réduit à la forme $\frac{0}{0}$. Dans ce cas, la valeur particulière de la fraction est déterminée, et on aurait pu lui donner d'avance une forme telle, que cette substitution particulière ne lui donnât pas l'apparence de l'indétermination. En effet, soit une fraction $\frac{F(x)}{\varphi(x)}$ qui se réduit à $\frac{0}{0}$ quand on y fait $x=a$. Puisque l'hypothèse $x-a=0$ rend nuls ses deux termes, chacun d'eux doit renfermer en facteur une certaine puissance positive de $x-a$, que l'on mettra en évidence en transformant $x-a$ en un monome. Posant donc $x-a=h$, ou $x=a+h$, il viendra

$$\frac{F(x)}{\varphi(x)}=\frac{F(a+h)}{\varphi(a+h)}=\frac{F(a)+F'(a)h+F''(a)\frac{h^2}{2}+\text{etc.}}{\varphi(a)+\varphi'(a)h+\varphi''(a)\frac{h^2}{2}+\text{etc.}}.$$

Or, par hypothèse, $F(a)=0$, $\varphi(a)=0$; h devient donc fac-

teur aux deux termes, $x - a$ l'était donc, puisque $h = x - a$, et c'est l'existence de ce facteur qui, par l'hypothèse $x = a$, réduisait les deux termes à o. Le supprimant, il vient

$$\frac{F(a+h)}{f(a+h)} = \frac{F(x)}{\varphi(x)} = \frac{F'(a) + F''(a)\frac{h}{2} + \ldots}{\varphi'(a) + \varphi''(a)\frac{h}{2} + \ldots}.$$

D'où l'on voit que quand $h = 0$, la fraction se réduit à $\frac{F'(a)}{\varphi'(a)}$. Si l'on avait $F'(a) = 0$ ou $\varphi'(a) = 0$, cette valeur serait nulle ou infinie; si ces deux conditions avaient lieu simultanément, en supprimant ces deux termes dans la fraction générale, puis faisant $h=0$ après avoir supprimé le facteur commun h, elle se réduirait à $\frac{F''(a)}{\varphi''(a)}$. Et ainsi de suite; d'où se conclut cette règle:

Pour trouver la valeur d'une fraction qui devient $\frac{0}{0}$ *pour* $x = a$, *prenez les dérivées des deux termes et divisez-les dans le même ordre après y avoir fait* $x = a$; *si la nouvelle fraction se présente encore sous la forme* $\frac{0}{0}$, *traitez-la de la même manière, jusqu'à ce que les deux termes ne se réduisent pas à* o; *vous aurez la vraie valeur de la fraction qui pourra être nulle, finie ou infinie.*

Exemple. Soit la fraction $\frac{2x^2 - ax - a^2}{3x^3 - 4a^2x + a^3}$,

qui devient $\frac{0}{0}$ pour $x = a$; les deux dérivées seront $4x - a$ et $9x^2 - 4a^2$; en y faisant $x = a$, la fraction aura pour valeur $\frac{3a}{5a^2}$ ou $\frac{3}{5a}$.

30. Remarque. Mais, il arrive souvent que les dérivées successives sont toutes nulles ou infinies, et alors cette méthode n'est plus applicable. Cela a lieu, par exemple, quand il se trouve des puissances fractionnaires de $x - a$. Dans les cas de ce genre, il faut substituer $a + h$ à x, et développer l'expres-

sion immédiatement et sans recourir à la formule qui suppose que le résultat procède suivant les puissances entières positives de h, ce qui n'arrive pas toujours. Alors le facteur h se trouve mis en évidence de lui-même; on le supprime, et on fait ensuite $h=0$; on a ainsi la valeur cherchée.

1°. Soit, pour exemple, $\frac{\sqrt{2ax-2a^2}+\sqrt[3]{2x^3-ax^2-a^3}}{\sqrt[4]{x^5-a^5}}$;

faisant $x=a+h$, le premier radical devient $\sqrt{2ah}$, le second $\sqrt[3]{4a^2h+5ah^2+2h^3}$, et le troisième............... $\sqrt[4]{5a^4h+10a^3h^2+10a^2h^3+5ah^4+h^5}$.

Dans le 1er on a pour facteur $h^{\frac{1}{2}}$, dans le second $h^{\frac{1}{3}}$, et dans le troisième $h^{\frac{1}{4}}$. Supprimant donc le facteur commun $h^{\frac{1}{4}}$, aux deux termes de la fraction, h restera facteur au numérateur seul, et l'hypothèse $h=0$ réduira alors la fraction à 0.

2°. Soit encore la fraction $\frac{\sqrt{x-a}+2\sqrt{x^2-a^2}}{a\sqrt{x^2-ax}}$;
on trouvera en faisant $x=a+h$,

$$\frac{\sqrt{h}+2\sqrt{2ah+h^2}}{a\sqrt{ah+h^2}}.$$

Supprimant le facteur commun $h^{\frac{1}{2}}$, il vient $\frac{1+2\sqrt{2a+h}}{a\sqrt{a+h}}$,

qui par l'hypothèse $h=0$, donne $\frac{1+2\sqrt{2a}}{a\sqrt{a}}$.

Si les deux termes de la fraction $\frac{F(x)}{\varphi(x)}$ devenaient infinis pour $x=a$, on ramènerait ce cas au précédent, en mettant la fraction sous la forme $\frac{\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right)}{\left(\frac{1}{F(x)}\right)}$; car alors le numérateur et le dénominateur deviendraient nuls, et on agirait comme précédemment.

31. Il existe une espèce très remarquable de fractions, qui se réduisent à $\frac{0}{0}$, ce sont celles dont les deux termes sont des accroissemens de fonction d'une même variable, relatifs à un accroissement indéfiniment décroissant de cette variable. Voyons comment on peut en déterminer la valeur.

1°. Soit une fonction $F(x)$, et soit demandé la limite du rapport de son accroissement à l'accroissement indéfiniment décroissant de x. Désignant ce dernier par h, il faudra chercher la limite du rapport $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$, qui se réduit à $\frac{0}{0}$ quand $h=0$. Or, si l'on développe $F(x+h)$, la fraction se réduira à

$$\frac{hF'(x)+\frac{h^2}{2}F''(x)+\text{etc.}}{h}.$$

Supprimant le facteur h et faisant ensuite $h=0$, on trouve pour limite $F'(x)$; d'où l'on conclut ce résultat remarquable :

*La dérivée d'une fonction d'*x *est la limite du rapport de l'accroissement de cette fonction à l'accroissement indéfiniment décroissant de* x.

On aurait pu appliquer à cette fraction la règle précédente, et prendre la dérivée de ses deux termes par rapport à h, ce qui eût donné $\frac{F'(x+h)}{1}$, qui pour $h=0$, se réduit à $F'(x)$.

2°. Pour trouver la limite du rapport des accroissemens de deux fonctions $F(x)$, $\varphi(x)$, quand l'accroissement h de x décroît indéfiniment. Il s'agit de voir ce que devient la fraction $\frac{F(x+h)-F(x)}{\varphi(x+h)-\varphi(x)}$ quand $h=0$; ce qui lui donne la forme $\frac{0}{0}$. Developpant $F(x+h)$ et $\varphi(x+h)$, puis supprimant le facteur commun h, et faisant ensuite $h=0$, on trouve $\frac{F'(x)}{\varphi'(x)}$.

32. Nota. Tout ce qui a été dit sur les dérivées, peut donc s'appliquer aux limites des rapports des accroissemens indéfiniment décroissans des fonctions dépendantes d'une même variable.

Des coefficiens indéterminés.

33. On nomme ainsi les coefficiens inconnus d'une expression dont on connaît la forme des termes par rapport aux puissances de la lettre ordonnatrice. On peut avoir dans leur emploi deux objets différens, ou de déterminer les valeurs mêmes de ces coefficiens, ou de trouver les conditions résultantes de la forme supposée à l'expression proposée, et, dans ce dernier cas, on ne cherche qu'à opérer leur élimination. Dans tous les cas, on obtient les équations nécessaires par le moyen général que nous avons déjà indiqué, et qui consiste à faire les calculs nécessaires à la vérification des conditions données.

Pour bien faire concevoir l'esprit de cette méthode, qui est une des plus fécondes de l'analyse, nous allons en offrir quelques applications à des questions que nous ne traiterons pas à fond, mais seulement sous le rapport de la méthode dont nous nous occupons présentement.

34. Problème. *Déterminer le quotient de la division de deux polynomes, et trouver les conditions pour que cette division puisse se faire exactement.* Soient les deux polynomes

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + Tx + U,$$
$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots + hx + k.$$

Leur quotient sera du degré $m-n$, et le reste du degré $n-1$; ils seront donc de la forme

$$x^{m-n} + \alpha x^{m-n-1} + \mathcal{C} x^{m-n-2} \ldots + \mu x + \nu,$$
$$Mx^{n-1} + Nx^{n-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + V.$$

Pour vérifier s'ils conviennent, il faut voir si, en multipliant le diviseur par le quotient et ajoutant le reste, on reproduit identiquement, c'est-à-dire terme pour terme, le dividende. Ce dernier polynome étant du degré m, aura $m+1$ termes, et comme le premier sera x^m de part et d'autre, il n'y aura que m équations entre les coefficiens donnés, et les inconnues $\alpha, \mathcal{C} \ldots \mu, \nu$, M, N, ... V, qui sont en tout au nombre de m, et se trouveront, par conséquent, déterminées.

Si l'on demandait quelles relations devraient avoir lieu entre les coefficiens donnés, pour qu'il n'y eût pas de reste, il faudrait que l'on eût $M = o$, $N = o, \ldots, V = o$, ce qui ferait n équations de plus que d'inconnues. Dans ce cas, on n'aurait qu'à éliminer les $m - n$ inconnues $\alpha, \beta, \ldots \mu, \nu$, entre les m équations dans lesquelles on aurait fait $M = o$, $N = o \ldots V = o$; on obtiendrait par là n équations de conditions entre les coefficiens des deux polynomes proposés.

On pourra chercher quelles seraient les conditions pour que la division réussît, le quotient s'arrêtant à un terme d'un exposant désigné, soit positif, soit négatif.

35. Problème. *Extraire la racine $m^{ième}$ d'un polynome, et trouver les conditions pour qu'il n'y ait pas de reste.* Soit le polynome

$$x^{mn} + Ax^{mn-1} \ldots + U.$$

Sa racine sera de la forme

$$x^n + \alpha x^{n-1} + \beta x^{n-2} \ldots + \mu,$$

et le reste de la forme

$$Mx^{mn-n-1} + Nx^{mn-n-2} \ldots + V.$$

La vérification se fera en élevant la racine approchée à la puissance m, en ajoutant le reste et voyant si la somme est identique avec le polynome proposé. Il résultera de là mn équations entre les coefficiens donnés et ceux des deux polynomes inconnus, qui sont au nombre de mn, et se trouveront par conséquent déterminés.

Si l'on demandait que l'extraction ne donnât pas de reste, il faudrait les $mn - n$ équations, $M = o$, $N = o \ldots V = o$; il ne resterait plus alors que n inconnues $\alpha, \beta, \ldots, \mu$; il y aurait, par conséquent, $mn - n$ équations de condition entre les coefficiens donnés; et on les obtiendrait par l'élimination de $\alpha, \beta \ldots, \mu$.

On pourrait demander que le reste s'évanouît lorsque, dans la racine, on parviendrait à un terme d'un exposant donné, positif ou négatif : cela n'offrirait aucune difficulté.

36. Problème. *Trouver les conditions pour qu'un polynome d'un degré donné soit décomposable en facteurs d'une forme donnée; par exemple, que l'un soit une puissance* n *d'un binome du premier degré; l'autre, une puissance* p *d'un autre binome, et ainsi de suite.* Soit le polynome

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \dots + V.$$

Il faudra qu'il soit identique avec un produit de la forme

$$(x-\alpha)^n (x-\beta)^p (x-\gamma)^q \text{ etc.},$$

α, β, γ, etc., étant des quantités arbitraires. Effectuant le produit et l'identifiant avec le polynome donné, on aura m équations dont on éliminera α, β, γ, etc., pour avoir les équations de condition. Le nombre de ces équations sera égal au degré du polynome, moins le nombre des indéterminées α, β, γ, etc.; si quelques-unes d'entre elles étaient fixées d'avance, le nombre des conditions augmenterait d'autant; et enfin, si elles étaient toutes données, on aurait m équations qui détermineraient immédiatement les coefficiens du polynome proposé.

Au lieu de choisir des puissances de binomes du premier degré, on aurait pu demander des puissances de polynomes quelconques; la marche serait toujours la même.

37. Problème. *Trouver les conditions pour qu'un polynome soit décomposable en facteurs du premier degré, de la forme* x — a, *et dont les seconds termes soient en progression par différence ou par quotient.* Soit le polynome

$$x^m + Ax^{m-1} \dots + V.$$

1°. Soit δ la différence de la progression, et a le premier terme; le polynome proposé devra être identique avec le produit

$$(x-a)(x-a-\delta)(x-a-2\delta)\dots\{x-a-(m-1)\delta\}.$$

Il en résultera m équations, dont on éliminera a et δ, et il restera $m-2$ équations entre les coefficiens. Si l'on donnait la différence de la progression, il y aurait $m-1$ équations de condition.

2°. Si la progression était par quotient, la décomposition serait de la forme

$$(x-a)\,(x-qa)\,(x-q^2a)\ldots(x-q^{m-1}a),$$

et le calcul aurait eu de même pour objet d'éliminer a et q.

38. Problème. *Étant donnée une fonction* F(x), *trouver le développement de* F(x + h) *sachant qu'il procède suivant les puissances entières et positives de* h. Le développement pourra être mis sous la forme

$$F(x+h)=F(x)+Ah+Bh^2+Ch^3+Dh^4+\text{etc.}$$

Le terme indépendant de h est $F(x)$, parce que pour $h=0$ le premier membre se réduit à $F(x)$; et par définition, A est la dérivée de $F(x)$ par rapport à x.

Pour déterminer B, C, D, ..., nous observerons encore, d'après la forme du premier membre, que la dérivée par rapport à x est la même que par rapport à h. Désignant donc par A', B', C', ..., les dérivées de A, B, C, ..., par rapport à x, on aura les deux expressions identiques

$$A+A'h+B'h^2+C'h^3+\text{etc.}$$
$$A+2Bh+3Ch^2+4Dh^3+\text{etc.}$$

D'où l'on tire

$$B=\frac{A'}{2},\ C=\frac{B'}{3},\ D=\frac{C'}{4},\ \text{etc.}$$

Désignant par $F'(x)$, $F''(x)$, $F'''(x)$, ..., les dérivées successives de $F(x)$, ces valeurs deviennent

$$A=F'(x),\ B=\frac{F''(x)}{2},\ C=\frac{F'''(x)}{2.3},\ D=\frac{F^{\text{IV}}(x)}{2.3.4},\ \text{etc.};$$

et le développement sera

$$F(x+h)=F(x)+F'(x)h+F''(x)\frac{h^2}{2}+F'''(x)\frac{h^3}{2.3}+\text{etc.}$$

39. Problème. *Connaissant la fonction* F(x, y), *développer* F(x + h, y + k), *par rapport aux puissances croissantes de* h *et* k.

Substituant d'abord $x+h$ à x, sans changer y, la fonction $F(x,y)$, deviendra

$$F(x,y)+hF'(x)+\frac{h^2}{2}F''(x)+\text{etc.}$$

$F'(x)$, $F''(x)$, etc., désignant les dérivées de $F(x, y)$ par rapport à x, regardant y comme une constante. Substituant dans ce développement, $y+k$ à y, il vient

$$\begin{aligned}F(x,y)+F'(x)h+F''(x)\frac{h^2}{2}+\ldots\ldots\\ +F'(y)k+Phk\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +F''(y)\frac{k^2}{2}\ldots\ldots\end{aligned}$$

P désigne la dérivée par rapport à y de $F'(x)$, dans laquelle x serait regardé comme constant. Quant à la manière de former les autres coefficiens, elle est indiquée par le calcul; mais nous n'en donnerons pas la notation, parce qu'elle est assez compliquée, et qu'on n'en fait maintenant aucun usage.

On agirait de la même manière pour un nombre quelconque de variables; nous nous dispenserons d'entrer dans de plus grands détails à cet égard, et nous bornerons là les applications de la méthode des coefficiens indéterminés.

Des Maxima et Minima.

40. Lorsque l'on fait croître d'une manière continue depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$ la variable d'une fonction, cette fonction varie d'une manière continue, mais elle peut, après avoir cru jusqu'à un certain point, décroître, puis croître de nouveau pour redécroître ensuite, etc.; toute valeur de la fonction à partir de laquelle un accroissement se change en décroissement, se nomme *maximum;* dans le cas inverse elle se nomme *minimum*.

Un maximum d'une fonction est donc une valeur telle, que si la variable augmente ou diminue à partir de sa valeur correspondante, la fonction commence dans les deux cas par di-

minuer dans un intervalle qui peut être très petit. Le minimum a lieu quand la fonction croît dans les deux mêmes cas.

41. Cela posé, voyons comment on peut déterminer les valeurs de x auxquelles correspondent des maxima ou minima dans une fonction donnée.

Soit la fonction $F(x)$, et x' une valeur de x à laquelle correspond un maximum. Il faudra qu'en faisant $x=x'\pm h$, $F(x)$ décroisse dans les deux cas pour les valeurs de h commençant depuis o. Le deux développemens seront

$$F(x')+F'(x')h+F''(x')\frac{h^2}{1.2}\ldots$$

$$F(x')-F'(x')h+F''(x')\frac{h^2}{1.2}\ldots$$

Or, on peut faire h assez petit pour que le terme du premier degré en h l'emporte sûr tous les autres (*) et donne par conséquent son signe à la variation totale de $F(x')$; et comme dans les deux développemens ce terme du premier degré est de signe différent, la fonction aurait cru dans un cas et décru dans l'autre. Il n'y aura donc ni maximum ni minimum pour $F(x')$ si ce terme ne disparait pas. Une condition commune au maximum et au minimum est donc $F'(x')=0$.

Si $F''(x')$ n'est pas nul, les deux accroissemens de $F(x')$ sont de même signe pour les valeurs de h depuis o jusqu'à une limite qui peut être très voisine de o, et il y aura maximum si $F''(x')$ dont dépend le signe de l'accroissement est négatif, et minimum s'il est positif.

Par une raison semblable, si on avait $F''(x')=0$, il fau-

(*) Soit en effet une série indéfinie

$$Ah+Bh^2+Ch^3+Dh^4\ldots$$

Elle peut se mettre sous la forme $h(A+Bh+Ch^2+Dh^3\ldots)$

Or, l'hypothèse $h=0$ annullant les termes Bh, Ch^2, $Dh^3\ldots$, et par suite leur somme, on conçoit qu'il est possible de faire h assez petit pour que cette somme soit moindre que toute grandeur donnée, et par conséquent moindre que A : d'où il résultera que Ah sera moindre que la somme Bh^2+Ch^3+ etc.

drait, pour qu'il y eût maximum ou minimum, qu'on eût aussi $F'''(x') = 0$, et le signe de $F^{IV}(x')$ déterminerait lequel des deux a lieu; et ainsi de suite. D'où résulte cette règle :

*Pour trouver les maxima et minima d'une fonction d'*x, *égalez sa dérivée à* 0, *les valeurs d'*x *conviendront si elles rendent nulles un nombre impair quelconque de dérivées successives, et devront être rejetées dans le cas contraire. Il y aura maximum si la première dérivée qui ne s'annulle pas devient négative par leur substitution; il y aura minimum si elle devient positive.* Nous supposons dans tout ce qui précède qu'aucun coefficient ne devient infini. Nous sortirions des bornes que nous nous sommes prescrites en entrant dans les détails nécessaires à ce sujet. Cette théorie se trouvera complétée dans le calcul différentiel, et les élèves pourront consulter sur ce point les Traités de Lagrange et de Lacroix.

Exemple. Soit proposé de *partager un nombre* a *en deux parties dont le produit soit maximum.* Soit x l'une des parties, l'autre sera $a - x$, et le produit $ax - x^2$; la première dérivée égalée à o donnera $a - 2x = 0$, d'où $x = \frac{1}{2}a$. La seconde dérivée étant négative, $x = \frac{1}{2}a$ rend le produit un maximum.

Cela fait voir que *le plus grand rectangle que l'on puisse faire avec un périmètre donné est le carré;* et que *le plus petit périmètre d'un rectangle dont la surface est constante a lieu dans le cas du carré.*

42. Problème. *Trouver les maxima et minima d'une fonction de* m *variables entre lesquelles on a* (m — 1) *équations.*

Soit la fonction proposée $F(x, y, z, \ldots)$.

Puisqu'on a $m-1$ équations entre $x, y, \ldots, u$, on peut regarder $y, z \ldots u$, comme des fonctions d'x, et appliquer à $F(x, y, \ldots u)$ les principes relatifs aux fonctions d'une seule variable. On prendra donc sa dérivée en traitant $y, z, \ldots u$, comme des fonctions d'x, dont les dérivées seront déterminées comme nous l'avons déjà vu au moyen des $m-1$ équations données : le reste s'achevera comme dans le cas d'une seule variable.

Exemple. *Trouver le maximum ou le minimum de la somme*

des puissances $m^{ièmes}$ de deux nombres, dont on connaît la somme des produits par des nombres donnés a, b. Soit c la somme donnée, on aura $ax + by = c$, et il faudra trouver le maximum ou minimum de $x^m + y^m$. La dérivée de y étant désignée par y', on aura par ce qui précède, $mx^{m-1} + my^{m-1}y' = 0$, et l'équation $ax + by = c$, donnera

$$a + by' = 0; \text{ d'où } x^{m-1} - \frac{ay^{m-1}}{b} = 0, \text{ et } x = y\sqrt[m-1]{\frac{a}{b}}.$$

Ce qui ne donne pour x et y que les seules valeurs réelles

$$y = \frac{c\sqrt[m-1]{b}}{a\sqrt[m-1]{a} + b\sqrt[m-1]{b}}, \quad x = \frac{c\sqrt[m-1]{a}}{a\sqrt[m-1]{a} + b\sqrt[m-1]{b}}.$$

La seconde dérivée de $x^m + y^m$ devient, en observant que la dérivée de y' est nulle,

$$m(m-1)x^{m-2} + m(m-1)y^{m-2}y'^2.$$

Reportant pour x et y leurs valeurs qui sont positives, le signe de cette expression ne dépendra que de celui de $m(m-1)$.

1°. Si m est positif et plus grand que 1, on a alors un minimum.

2°. Si m est positif et plus petit que 1, on a un maximum.

3°. Si m est négatif, on a un minimum.

PROBLÈME. *Trouver les maxima et minima d'une fonction de deux variables indépendantes.* Soit la fonction $F(x, y)$, et x', y', les valeurs auxquelles correspond un maximum ou un minimum. Substituant à x et y, $x' + h$, $y' + k$, h et k étant deux indéterminées quelconques, la fonction deviendra

$$\begin{aligned} F(x', y') + F'(x')h + F''(x')\frac{h^2}{2} + \ldots \\ + F'(y')k + Phk + \ldots \\ + F''(y')\frac{k^2}{2} + \ldots \end{aligned}$$

Or, comme le signe de l'accroissement de $F(x', y')$, dépend des termes du premier degré, et doit rester le même lorsque h et k changent de signe, on aura pour condition commune au maximum et au minimum $F'(x') = 0$, $F'(y') = 0$.

Les termes du second degré détermineront alors le signe de l'accroissement; or, leur somme peut se mettre sous la forme

$$\frac{h^2}{2}\left\{F''(y')\left(\frac{k}{h}\right)^2 + 2P\left(\frac{k}{h}\right) + F''(x')\right\}.$$

La première condition sera que ce trinome reste de même signe, quel que soit $\frac{k}{h}$, sans quoi il n'y aurait ni maximum, ni minimum; ses racines devront donc être imaginaires; ce qui donnera cette troisième condition commune $P^2 < F''(y') \times F''(x')$.

Enfin, le signe du trinome se reconnaîtra au signe du premier terme, de sorte qu'il suffira pour le maximum, que $F''(y') < 0$ et pour le minimum que $F''(y') > 0$; ce qui entraîne les mêmes conditions pour $F''(x')$, en vertu de $F''(y') \times (F''(x') > P^2$.

Si tous les termes du second degré s'évanouissaient, il faudrait qu'il en fût de même de ceux du troisième, et que le polynome du 4ᵉ degré eût toutes ses racines imaginaires; et ainsi de suite.

43. Problème. *Trouver les maxima ou minima d'une fonction de* m *variobles, entre lesquelles on a* $m - 2$ *équations.*

Les $(m - 2)$ équations permettent de regarder $(m - 2)$ variables, comme fonctions de deux indépendantes x et y, et on rentre dans le cas précédent. Les dérivées partielles successives de la fonction proposée renfermeront les dérivées partielles des $(m - 2)$ variables par rapport à x et y, qui se déduiront des $(m - 2)$ équations données.

Nous allons offrir quelques applications de ces problèmes généraux.

Problème. *Trouver la plus courte distance de deux droites non situées dans un même plan.*

Soient les équations de ces droites $\begin{cases} x = az + \alpha, & x = a'z + \alpha' \\ y = bz + \beta, & y = b'z + \beta', \end{cases}$

Soient x, y, z, et x'', y'', z'' les coordonnées de deux points pris respectivement sur chacune d'elles, le carré de leur distance sera $(x-x'')^2+(y-y'')^2+(z-z'')^2$.

Dans ce cas-ci on peut éliminer facilement les quatre indéterminées x, y, x'', y'', et cette expression devient

$$(az+\alpha-a'z''-\alpha')^2+(bz+\beta-b'z''-\beta')^2+(z-z'')^2.$$

Egalant à zéro les dérivées par rapport à z et z'', il vient

$$2a(az+\alpha-a'z''-\alpha')+2b(bz+\beta-b'z''-\beta')+2(z-z'')=0,$$
$$2a'(az+\alpha-a'z''-\alpha')+2b'(bz+\beta-b'z''-\beta')+2(z-z'')=0;$$

ou bien en divisant par 2 et remettant les valeurs de x, y, x'', y'', puis divisant par $z-z''$,

$$1+a\frac{x-x''}{z-z''}+b\frac{y-y''}{z-z''}=0,\quad 1+a'\frac{x-x''}{z-z''}+b'\frac{y-y''}{z-z''}=0.$$

Equations qui expriment que la droite qui passe par les points x, y, z et x'', y'', z'' est perpendiculaire sur les deux premières. Les joignant aux quatre équations données, on déterminerait les deux points de rencontre, et par suite leur distance

La seconde dérivée par rapport à z est $2(1+a^2+b^2)$, celle par rapport à z'' est $2(1+a'^2+b'^2)$, et la dérivée par rapport à z'' de la première par rapport à z est $-2(1+aa'+bb')$. Les soumettant aux conditions assignées précédemment, on reconnaîtra sans peine que la distance est un minimum.

44. Problème. *Trouver le maximum ou le minimum d'une fonction implicite liée à* m *variables par* m *ou* m — 1 *équations*. Soit u la fonction;

1° Si l'on a m équations

$F(x,y,z...u)=0$, $F_1(x,y,z......u)=0$..... $F_{(m-1)}(x,y,z....u)=0$, u peut alors être considéré comme fonction d'une seule variable indépendante x, et il ne s'agit par conséquent que de déterminer ses dérivées successives par rapport à x; ce qui a été enseigné dans la théorie des dérivées.

Donnons-en quelques exemples.

Problème. *Trouver le maximum ou le minimum de l'ordonnée de la courbe dont l'équation est* $y^2+x^2+ay+bx+c=0.$

Désignons par y' la dérivée d'y par rapport à x, on aura

$$2yy'+2x+ay'+b=0.$$

Or, il faut que $y'=0$; il reste donc $2x+b=0$, d'où $x=-\frac{b}{2}$,

et par suite $$y=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-\frac{b^2}{4}-c}.$$

On voit facilement par la valeur $x=-\frac{b}{2}$ que les deux points sont sur la perpendiculaire abaissée du centre du cercle, lieu de l'équation donnée. Des deux valeurs d'y, l'une donne un maximum, l'autre un minimum; c'est ce qu'on trouvera sans difficulté.

Problème. *De tous les points d'un plan qui sont également éclairés par deux points lumineux pris dans le même plan, trouver ceux qui sont les plus éloignés de la droite qui joint les points lumineux.*

Soient D et E (*fig.* 7) les distances d'un point M également éclairé aux deux points lumineux A et B dont les intensités à la distance 1 sont m^2, n^2. L'action de ces lumières sur M sera pour la première $\frac{m^2}{D^2}$, et pour la seconde $\frac{n^2}{E^2}$; et comme il doit recevoir la même quantité de lumière de A et B, on aura

$$\frac{m}{D}=\frac{n}{E},\ \text{ou}\ mE=nD.$$

Appelant x, y, a, les distances AP, MP, AB, on a

$$D^2=y^2+x^2,\ y^2+(a-x)^2=E^2;$$

et il faut trouver le maximum d'y, ayant trois équations et trois variables étrangères E, D, x.

Dérivant les trois équations en considérant ces trois variables comme fonctions d'x, il vient

$$mE' = nD', \quad DD' = yy' + x, \quad EE' = yy' - (a - x);$$

d'où l'on tire facilement par l'élimination,

$$y' = \frac{Enx - Dmx + Dam}{Dy - Eny},$$

et pour le maximum on aura $Enx - Dmx + Dam = 0$, qui, jointe aux trois proposées, déterminera D, E, x, y.

On trouvera immédiatement une équation en x seul, en reportant dans la dernière la valeur $E = \frac{n}{m}D$, et l'on aura

$$x = \frac{m^2 - n^2}{am^2};$$

la substituant dans les autres équations, on tirera

$$y = \pm \frac{amn}{m^2 - n^2}.$$

Le point et sa distance à la droite se trouvent déterminés par là, et l'on verra facilement que la valeur positive d'y est un maximum et la négative un minimum : cette dernière serait aussi un maximum si l'on faisait abstraction de son signe.

LIVRE II.

CONSIDÉRATIONS GÉNÉRALES SUR LA GÉOMÉTRIE.

CHAPITRE PREMIER.

Des quantités géométriques en général.

45. Les objets de la nature font naître en nous les idées d'étendue et de forme. Nous lions d'abord intimement ces idées aux corps dont nous les recevons; mais bientôt notre esprit les en sépare, les isole, et les conçoit indépendamment des objets matériels qui leur ont primitivement donné naissance.

Les grandeurs et les formes deviennent alors pour nous des êtres d'imagination auxquels nous supposons une exactitude et une régularité qui ne se trouvent pas dans la nature. Nous les considérons indépendamment des propriétés physiques de la matière; et les conséquences auxquelles nous parvenons en les comparant entre elles s'appliqueront avec d'autant plus de justesse aux objets réels, que ces objets se rapprocheront davantage de cette exactitude idéale.

L'étendue étant ainsi dégagée de toute idée de matière, nous ne voyons rien qui puisse y fixer des bornes absolues, et notre imagination la conçoit indéfiniment prolongée dans tous les sens.

Si nous nous figurons une portion finie quelconque de cet espace indéfini, elle nous donne l'idée de forme par la manière dont elle est terminée; nous nommons cette portion *volume*, et *surface* la limite de son étendue en tous sens.

Si l'on imagine maintenant une portion finie de surface, elle sera terminée d'une certaine manière; la limite de son étendue est ce qu'on appelle une *ligne*.

Enfin, l'on peut concevoir une portion quelconque de ligne : elle aura ses limites ou extrémités qui ont reçu le nom de *points*.

La surface n'étant que la limite du volume, n'a donc pas une étendue de même nature que celle du volume; la ligne qui n'est que la limite d'une surface n'a pas non plus une étendue de même nature que le volume ni que la surface : enfin le point, ou la limite d'une ligne, n'offre l'idée d'aucune espèce d'étendue. D'où il suit que sous le rapport de l'étendue, on ne pourra comparer des volumes qu'avec des volumes, des surfaces qu'avec des surfaces, des lignes qu'avec des lignes. Quant aux points, n'ayant aucune espèce d'étendue, ils ne sauraient être considérés sous ce point de vue.

L'ensemble des rapports qui se déduisent de la comparaison de ces diverses espèces d'étendue, de leurs formes et de la position des surfaces, des lignes et des points qu'on y peut considérer, constitue la science qu'on nomme *Géométrie*.

46. Dans la Géométrie, comme dans toute autre science, il faudra partir d'idées premières dues uniquement aux sensations et à l'expérience. La première chose à faire est donc de choisir ces idées élémentaires, et tout l'art consistera ensuite à y ramener toutes les autres et à en déduire tous les rapports qu'elles peuvent avoir entre elles.

Parmi les lignes, la plus simple est la *ligne droite*. Des expériences journalières nous en donnent la sensation; nous la voyons dans la tension d'un fil flexible, dans la manière dont les corps nous envoient la lumière, etc.; à cette idée de forme s'en joignent d'autres accessoires, comme, par exemple, d'un point à un autre on ne peut mener qu'une seule ligne droite, et qu'elle est plus courte que toute autre ligne terminée aux deux mêmes points.

Une ligne composée de plusieurs droites se nomme *ligne brisée*; et toute ligne qui n'est ni droite ni brisée est appelée *ligne courbe*, ou *courbe*.

47. Parmi les surfaces, il en est une qui occupe par sa sim-

plicité le même rang que la droite parmi les lignes. Cette surface est le *plan*, et sa propriété fondamentale consiste en ce que toute droite qui a deux points communs avec elle s'y trouve comprise dans toute son étendue, en les supposant l'une et l'autre indéfiniment prolongées. On a coutume de définir le plan par cette propriété, et d'admettre alors *à priori* qu'il peut exister une surface de ce genre : or il est très-important de n'admettre ainsi que le plus petit nombre possible d'idées primitives, et je crois qu'on peut s'en dispenser pour le plan et le ramener de la manière suivante à la notion de la ligne droite, et à quelques principes simples de superposition qui ne renferment nullement l'idée de plan ni même de surface.

On nomme triangle la figure déterminée par trois droites qui joignent deux à deux trois points non en ligne droite. Or on prouve immédiatement par la superposition que deux triangles qui ont un angle égal (*) compris entre deux côtés respectivement égaux peuvent être appliqués l'un sur l'autre de manière à coïncider dans toutes leurs parties. Je dis de plus que si, toutes choses égales d'ailleurs, l'angle compris est différent, le troisième côté sera différent. En effet, soit ABC (*fig.* 6) le premier triangle et AC, AB les côtés égaux aux correspondans du second; transportons celui-ci de manière que le côté égal à AC coïncide avec AC, et qu'en même temps le côté AM égal à AB coupe la direction BC, en les prolongeant l'un et l'autre s'il est nécessaire. Parvenus à ce point, on rentre dans la démonstration de M. Legendre, et elle s'achève sans qu'il soit besoin d'introduire aucunement l'idée de surface ; et on en conclut immédiatement cet autre théorème, que deux triangles peuvent être superposés exactement quand ils ont les trois côtés respectivement égaux.

Cela posé, imaginons que par un point d'une droite on élève une *perpendiculaire*, et qu'on fasse prendre à cette dernière

(*) On dit que deux droites qui se coupent font entre elles le même angle que deux autres, quand on peut, en les transportant sans changer leur position relative, faire coïncider leurs directions respectives avec celles des deux autres.

toutes les positions possibles autour de ce point sans cesser d'être perpendiculaire à la première droite, elle engendrera une surface par cette continuité de positions successives; je dis que cette surface jouira de la propriété que si l'on en joint deux points quelconques par une ligne droite, cette droite y sera comprise dans toute son étendue. En effet, soit B (*fig.* 1) le point choisi sur la ligne donnée, et A et C deux points pris sur elle à égale distance de B, chaque point de la perpendiculaire mobile sera également distant de ces deux points. Soient deux points quelconques M, N, pris sur deux perpendiculaires; si on les joint par une droite, qu'on en prenne un point X, et qu'on mène la droite BX, je dis qu'elle sera perpendiculaire sur AC. En effet, MA=MC, NA=NC; donc les deux triangles AMN, CMN sont égaux; leurs angles en N sont donc égaux ainsi que leurs supplémens; donc les deux triangles ANX, CNX seront égaux, donc AX=CX; les deux triangles égaux ABX, BCX, prouvent que BX est perpendiculaire sur AC, et que par conséquent le point X est sur la surface en question. Cette surface est celle que nous avons nommée *plan*.

Je dis maintenant que par trois points non en ligne droite on peut toujours faire passer un plan, mais un seulement.

Soient en effet les trois points A, B, C (*fig.* 2); on conçoit d'abord que si l'on fait passer un plan par deux d'entre eux, ce plan ne sera pas déterminé de position et pourra toujours être amené à passer par le troisième. Supposons donc deux plans passant par A, B, C, et contenant par conséquent les trois droites qui joignent ces points deux à deux : soit M un point quelconque de l'un d'eux; si on le joint par une droite à un point quelconque D de AC, la ligne MD sera tout entière dans le premier plan, et par conséquent rencontrera quelque part en E la droite intermédiaire AB qui s'y trouve aussi comprise : mais les deux points D et E étant aussi dans le second plan, la droite indéfinie DE s'y trouvera pareillement, et par conséquent aussi le point M. Tout point de l'un quelconque des plans appartient donc aussi à l'autre : ces deux plans coïncident donc entièrement.

Il résulte de là que tout plan peut être engendré de la manière

indiquée précédemment. Car cette génération produit une surface telle, qu'en joignant deux quelconques de ses points à volonté par une droite, cette droite s'y trouve comprise tout entière, et nous venons de faire voir que deux surfaces de ce genre peuvent toujours coïncider. On peut donc indifféremment définir le plan par la propriété énoncée d'abord ou par la génération que nous avons indiquée à la suite.

Il résulte encore de ce qui précède, que les deux côtés d'un plan sont tout-à-fait identiques; car nous avons fait voir que tout plan pouvait coïncider sur un autre sans considérer lequel de ses deux côtés on appliquait sur celui-ci : ces deux côtés sont donc entièrement semblables, puisqu'ils peuvent successivement coïncider avec une même surface.

Deux droites qui se coupent, et en général toutes données où il se trouvera trois points non en ligne droite, détermineront la position d'un plan. Mais il ne sera pas toujours possible de trouver un plan qui passe par tous les points donnés quand il y en aura plus de trois. Ce que l'on peut faire pour deux droites qui se coupent devient impossible dans un grand nombre de cas pour deux droites qui ne se coupent pas : car on peut concevoir une ligne qui soit dans un plan et une autre qui perce ce plan sans rencontrer la première. Or aucun plan passant par celle-ci ne pourra passer par la seconde; car il contiendrait le point où elle perçait le premier plan, et se confondrait par conséquent avec lui; les deux droites auraient donc été dans ce premier plan, ce qui est contre l'hypothèse.

Toute surface composée de plans se nomme *surface polyèdre*, et toute surface qui n'est ni plane ni composée de plans se nomme *surface courbe*.

48. Dans un même plan, deux droites indéfinies peuvent avoir deux positions relatives bien distinctes; elles peuvent se rencontrer, elles peuvent aussi n'avoir aucun point commun dans leur étendue illimitée, et dans ce dernier cas, elles sont dites *parallèles*.

Les droites qui se coupent peuvent avoir une infinité de positions relatives; elles peuvent s'écarter plus ou moins les unes

des autres, et c'est ce que l'on appelle faire des angles plus ou moins grands.

Ainsi, les lignes AC, AD, AE (*fig.* 8), qui vont en s'écartant de plus en plus de AB, font avec elle des angles de plus en plus grands. Rien n'est plus facile que de comparer la grandeur de deux angles : on les transporte l'un sur l'autre; si leurs côtés coïncident en direction, ces angles seront égaux; sinon le plus grand sera celui qui comprendra l'autre entre ses côtés, comme DAB par rapport à CAB.

L'idée de l'égalité entraîne immédiatement celle du rapport quelconque : deux angles sont entre eux comme *m* est à *n*, lorsqu'ils contiennent un même angle, l'un *m* fois, l'autre *n* fois. Enfin, les angles sont des quantités susceptibles d'être comparées comme toutes les autres sous le rapport de la grandeur.

Quant à la position de parallélisme, elle a offert aux géomètres des difficultés qui n'ont point encore été levées, et qui ne le seront peut-être jamais de la manière qu'ils paraissent le désirer. Si on définit les parallèles, des droites qui situées dans le même plan ne peuvent jamais se rencontrer, on ne peut démontrer qu'elles sont perpendiculaires sur une même ligne, et si on les définit par la condition d'être perpendiculaires sur une même ligne dans un même plan, on ne peut prouver que deux lignes qui ne se rencontrent pas sont parallèles. Toute difficulté disparaîtrait si l'on pouvait démontrer que par un point pris dans le plan d'une droite on ne peut mener qu'une seule ligne dans le même plan qui, prolongée indéfiniment, ne rencontre pas la première. Cette proposition faute de démonstration a été admise d'elle-même, au grand regret de beaucoup de géomètres qui regardent encore la théorie des parallèles comme incomplète; mais si on les satisfaisait sur ce point, ils se rejetteraient sur la ligne droite, demanderaient qu'on en démontrât les propriétés premières, et regarderaient jusque là les bases de la Géométrie comme inexactes. Enfin ils pousseraient toujours leurs demandes au-delà des réponses, parce qu'on ne démontre rien sans se fonder sur quelque chose, et que par conséquent

vouloir tout démontrer est une chose non pas difficile à exécuter, mais qui implique contradiction.

Le parallélisme des plans offre les mêmes difficultés que celui des droites, puisqu'il s'y ramène immédiatement; mais il n'en offre pas de nouvelles, et la première théorie admise, la seconde s'ensuit sans difficulté; pour cela on commencera par démontrer que deux plans perpendiculaires à une même droite ne peuvent se rencontrer; pour faire voir ensuite que tout autre plan mené par l'un des points de rencontre avec la droite, rencontrerait les deux premières, on fera passer un plan quelconque par cette droite; il coupera les trois plans suivant trois droites dont deux seront perpendiculaires à la proposée, et dont la troisième coupera par conséquent chacune des deux premières, ce qui prouve que le troisième plan coupera chacun des deux autres. De là dérive sans peine toute la théorie du parallélisme dans l'espace.

49. Les plans offrent les mêmes positions relatives que les lignes; ils peuvent se rencontrer, et forment alors une nouvelle espèce d'angle dont la mesure se ramène, comme nous le dirons plus tard, à celle de l'angle rectiligne; ils peuvent être rencontrés par des droites, et donner lieu à un troisième genre d'inclinaison qui se ramène encore au premier; il peuvent être parallèles entre eux, c'est-à-dire ne pas se rencontrer quelque loin qu'on les prolonge; enfin ils peuvent être parallèles à des droites.

CHAPITRE II.

Des dimensions de l'étendue.

50. En remontant à l'étymologie du mot, on doit entendre par *dimension* d'un objet les élémens qui servent à déterminer sa mesure; c'est sous ce point de vue seulement qu'on peut s'en faire une idée nette et précise.

Les rectangles se mesurant par le moyen de leur base et de leur hauteur, ces deux lignes en seront les dimensions. Les parallélépipèdes rectangles se mesurant par les trois arêtes contiguës, ces trois lignes en seront de même les dimensions. Quant aux lignes droites, ne se mesurant que par elles-mêmes, elles sont leurs propres dimensions.

C'est ce qui a fait dire que l'étendue avait trois dimensions, *longueur, largeur* et *profondeur*: que les lignes n'en avaient qu'une seule, les surfaces deux et les volumes trois. Mais cette idée posée à *priori* et comme début dans la Géométrie, ne peut offrir à l'esprit rien de clair ni de satisfaisant. Où trouvera-t-on la longueur, la largeur et la profondeur d'un corps irrégulier; et si on lui accorde trois dimensions, n'en aura-t-il pas une infinité, puisqu'aucune direction n'a rien de plus remarquable que les autres? De plus, pour quoi supposerait-on que les dimensions fussent perpendiculaires entre elles. Si l'on se guide sur la forme, la hauteur et la longueur d'un parallélogramme, ne seront-elles pas ses deux côtés contigus; et si l'on se fonde sur l'idée de mesure, pense-t-on que celle de tous les volumes soit déterminée par leurs trois dimensions, quelque chose que l'on veuille entendre par là?

La seule chose à remarquer pour les surfaces et les volumes, c'est que leur mesure peut toujours se ramener à des produits de deux et de trois lignes, ce qui donne ce même nombre de dimensions algébriques à leur expression analytique. Mais cela revient à dire qu'on peut concevoir des rectangles ou des parallélépipèdes qui leur soient équivalens, et où trouver dans ces nouvelles figures les dimensions des premières qui ne leur ressemblent en rien?

Au reste, de quelque manière qu'on envisage les dimensions, on n'en parviendra pas moins aux mêmes résultats, et la science n'en souffrira nullement. Si donc nous avons un peu insisté sur ce point, c'est que la formation de l'esprit est plus importante encore que la Géométrie, et que les idées fausses ou incomplètes, quelque petite que paraisse leur importance réelle, ont toujours une influence funeste sur son développement.

CHAPITRE III.

De l'égalité dans les quantités géométriques.

51. On dit que deux quantités géométriques sont égales lorsque la seconde n'est autre chose que la première qui aurait changé de place sans que rien fût changé en elle; d'où il suit que chacune d'elles peut être amenée, par un déplacement convenable, à occuper le même espace que l'autre.

Il résulte de là que pour s'assurer si deux quantités sont égales, il faut voir s'il est possible de transporter l'une de manière qu'elle coïncide avec l'autre dans toutes ses parties, ou en d'autres termes, si elles sont *superposables*. Il est bien entendu que les volumes sont dépouillés de toutes les propriétés physiques, sans lesquelles on ne les trouve pas dans la nature, mais dont ils sont indépendans dans tous les rapports dont s'occupe la Géométrie. Ainsi la résistance et l'impénétrabilité de la matière ne gêneront en rien les superpositions des volumes, puisqu'il ne s'agit que de l'espace figuré et non matériel.

Après l'égalité absolue ou de superposition, la plus féconde en applications est l'*égalité en grandeur* indépendamment de la forme; on lui a donné le nom particulier d'*équivalence*. Ainsi deux lignes seront équivalentes lorsqu'elles auront la même étendue en longueur sans pouvoir être superposées; deux surfaces seront équivalentes lorsqu'elles renfermeront la même quantité de parties superficielles sans avoir la même forme; c'est ce qui arrivera lorsque de deux surfaces égales on retranchera une même surface à des places différentes; il est évident qu'il restera de part et d'autre la même quantité superficielle, et que cependant la coïncidence ne sera plus possible. Il en serait de même des volumes.

L'égalité en périmètre a aussi reçu un nom particulier; deux figures entre lesquelles elle existe sont dites *isopérimètres;* ce rapport peut donner lieu à un grand nombre de problèmes curieux, mais il est beaucoup moins fécond en conséquences que les précédens qui sont la base de toutes les comparaisons des grandeurs géométriques.

Outre ces diverses sortes d'égalité partielles, il en est une autre qui, par son importance, mérite une attention particulière et que nous allons traiter séparément.

De la Similitude.

52. On fait ordinairement consister la *similitude* de deux quantités géométriques dans l'égalité des inclinaisons et des rapports des lignes ou des faces homologues et l'identité de leur disposition. Cet énoncé renfermant des conditions surabondantes, c'est-à-dire qui sont des conséquences nécessaires les unes des autres, on a cherché une définition qui renfermât toutes les conditions qu'on voulait remplir, mais qui ne renfermât qu'elles seules. Les uns ont voulu écarter la considération des angles et n'introduire que des longueurs; ils ont appelé figures semblables celles où il y avait égalité entre les rapports des lignes nécessaires à la détermination de chacune d'elles; mais il restait à chercher combien de lignes étaient nécessaires à la détermination des figures, et la difficulté n'était pas diminuée. D'autres ont d'abord défini la similitude pour les triangles et les tétraèdres, et ont appelé semblables les figures ou solides dont tous les points homologues sont les sommets de triangles ou de tétraèdres semblables ayant des bases constantes et semblables; mais cette définition a l'inconvénient de ne pas renfermer dans un seul énoncé la similitude des tétraèdres et des autres solides; de plus il y manque encore des conditions relatives à la disposition des tétraèdres ou des triangles, sans quoi elle n'entraînerait pas la similitude. Je crois que l'on pourrait éviter tous ces inconvéniens en adoptant la définition suivante :

Deux quantités géométriques sont SEMBLABLES, *lorsqu'elles*

peuvent être placées de manière qu'en joignant un point fixe avec tous les points de l'une d'elles, on obtienne tous ceux de l'autre en prolongeant ces rayons dans un rapport constant.

De cette définition suivront immédiatement toutes les propriétés des quantités semblables. On reconnaîtra facilement les deux plus importantes, savoir, qu'en joignant leurs points homologues, les lignes résultantes seront également inclinées entre elles et dans le rapport constant des rayons. Toutes les autres s'en déduiront, comme on peut le voir dans tous les traités élémentaires, tant pour les lignes que pour les surfaces et les volumes.

Le point d'où partent les rayons se nomme *centre de similitude*; le rapport constant des lignes se nomme rapport de similitude. Si l'une des figures se transporte parallèlement à elle-même d'une manière quelconque dans l'espace, le centre de similitude se déplacera en même temps, mais le rapport de similitude restera constant, parce qu'il est égal à celui de deux lignes homologues des deux figures, et que ces lignes ne changent pas de grandeur.

53. Si, au lieu de prolonger les rayons, on les portait en sens contraire à partir du centre de similitude, la seconde figure serait encore semblable à la première, dans le cas où elles seraient planes, parce qu'elle rentrerait dans le premier cas en lui faisant faire une demi-révolution autour du centre; mais la même chose n'aurait plus lieu si tous les points n'étaient pas dans le même plan; les faces seraient respectivement semblables et également inclinées, mais leur disposition serait inverse et il n'y aurait plus similitude. On désigne ce nouveau rapport sous le nom de similitude inverse : il est pour les surfaces semblables ce que la *symétrie* est pour les surfaces égales, et deux surfaces inversement semblables sont telles, que l'une quelconque est semblable à la surface symétrique de la seconde.

CHAPITRE IV.

Sur la résolution des questions géométriques.

54. En Géométrie, comme en toute autre science, les questions ne peuvent se présenter que sous forme de théorèmes ou de problèmes. Un problème aura pour objet d'effectuer une construction d'après les rapports que doit avoir la chose à construire avec des choses données : pour y parvenir, on cherchera à ramener la construction demandée à une autre plus simple, celle-ci à une plus simple encore, jusqu'à ce que l'on en obtienne une que l'on puisse exécuter immédiatement.

Il y a deux choses à considérer dans la résolution d'un problème, la liaison des constructions et le dessin. Nous ne nous occuperons dans ce moment que de la première, et nous regarderons un problème comme résolu quand nous pourrons de proche en proche le ramener aux constructions élémentaires que l'on sait immédiatement effectuer.

Dans le choix de ces constructions élémentaires, on a dû considérer deux choses, la simplicité de leur composition et la facilité avec laquelle elles pourraient être exécutées au moyen des instrumens graphiques. Les seules lignes que les géomètres anciens et modernes aient voulu reconnaître comme élémens de leurs constructions sont les droites et les cercles, et ils regardaient comme non résolu tout problème qui aurait exigé que l'on traçât une autre courbe quelque simple qu'elle fût d'exécution : c'est ainsi qu'ils nous ont laissé à résoudre le problème de la trisection de l'angle, de la duplication du cube, etc. Cependant *Newton* s'est un peu affranchi de cette contrainte et a donné des solutions dans lesquelles il fait entrer des *conchoïdes*, courbes très simples, mais cependant moins faciles à décrire que la ligne droite et le cercle.

Le même embarras n'existe pas dans la démonstration des

théorèmes : comme on a pour unique but de démontrer la vérité d'un rapport désigné et non d'exécuter graphiquement ce qui y est relatif, on reste entièrement dans les abstractions, et l'on peut ranger dans la même classe toutes les choses démontrées possibles, quelque difficulté que puisse offrir leur exécution : il ne s'agit que de ce qui est, et non de ce que l'on peut faire.

55. Quant à la marche à suivre dans la résolution des problèmes, il est difficile de rien dire de général à cet égard sans tomber dans le vague. Il est évident d'abord que pour apercevoir comment les conditions données déterminent ce que l'on cherche, il faut étudier toutes ces conditions séparément, puis dans leur ensemble; et comme elles n'existent ensemble que quand la construction demandée est exécutée, on s'exprime ordinairement en disant qu'on suppose le problème résolu. Mais après cela, si l'on veut chercher comment les diverses parties de cette construction dépendent les unes des autres et se ramènent à un petit nombre d'entre elles, et comment celles-ci se ramènent à d'autres connues, c'est ce que l'on ne pourra faire que quand la nature de la question sera déterminée, et il serait inutile de chercher à cet égard des règles générales.

Il en est de même de la démonstration des théorèmes; dire qu'il faut les ramener à d'autres plus simples, c'est à peu de chose près ne rien dire : on ne peut indiquer de marche positive que quand on désigne au moins le genre de la proposition.

Or, moins il est possible de prescrire de règles générales, plus il est nécessaire de faire des recherches particulières, et c'est peut-être dans la Géométrie que cette nécessité se fait le plus sentir. Nous devons donc recommander aux élèves de résoudre le plus grand nombre possible de questions, et surtout de les résoudre complètement et d'examiner toutes les circonstances particulières qui peuvent s'y rencontrer. Nous leur offrirons un assez grand nombre d'exercices de ce genre; nous y avons joint des solutions succinctes qu'il ne leur restera plus qu'à développer.

Nous allons ajouter quelques observations aux généralités précédentes et faire connaître l'avantage qu'il peut y avoir quelquefois à intervertir l'ordre qui semble le plus naturel entre les données et les résultats demandés.

De la marche à suivre dans la résolution de certains Problèmes de Géométrie.

56. Dans tout problème graphique, on donne certaines choses construites, et on propose d'en construire d'autres liées d'une certaine manière à celles-ci. Or, il arrive souvent que les choses à construire peuvent être exécutées isolément des premières, et que la seule difficulté consiste à leur donner la position qu'elles doivent avoir relativement à celles-ci. Dans tous les cas de ce genre, il y a deux marches à suivre : on peut partir des constructions données, et opérer sur elles jusqu'à ce que l'on ait obtenu celles que l'on demandait, et alors le problème est résolu : ou bien commencer par construire les choses qui doivent avoir les rapports demandés avec les données, et d'après ces mêmes rapports construire sur elles ces données; il en résultera un système identique avec celui que l'on cherchait, puisque les données et les résultats y seront liés de la manière demandée; il ne restera donc plus qu'à en reporter les diverses parties au lieu où on avait voulu que la construction fût exécutée.

Il peut se faire que le système auxiliaire ne soit pas identique avec celui que l'on cherche, et lui soit seulement semblable; c'est ce qui arrive quand les grandeurs absolues des résultats ne sont pas données, et que l'on ne connaît que leurs rapports. Dans ce cas, au lieu de reporter sur le premier système des parties égales à celles du second, on les porte proportionnelles, et dans un rapport déterminé par deux grandeurs homologues quelconques.

CHAPITRE V.

De la mesure des quantités géometriques.

57. MESURER une chose, c'est trouver son rapport à l'unité : toute la théorie des mesures doit donc se réduire à trouver, de la manière la plus simple, le rapport de deux quantités de même espèce.

Les quantités les plus faciles à comparer entre elles sont les nombres entiers, et c'est à eux par conséquent qu'on a dû chercher à ramener toutes les autres. A cet effet, on conçoit l'unité portée sur la grandeur à mesurer, et si elle y est contenue exactement, le nombre entier qui en résulte est le rapport demandé. Si elle n'y est pas contenue un nombre entier de fois, on imagine les deux grandeurs décomposées en parties respectivement égales; le rapport des deux nombres entiers résultans est le rapport de la quantité proposée à celle qu'on a choisie pour unité, et donne par conséquent la mesure de la première.

Mais cette manière de procéder suppose qu'il existe une quantité qui puisse être contenue exactement tant dans l'unité que dans la grandeur à mesurer, c'est-à-dire que ces dernières aient une *commune mesure*. Or il peut arriver que deux quantités n'en aient pas, et alors elles ne sauraient être décomposées en deux nombres entiers de parties égales; leur rapport ne peut donc être exprimé par celui de deux nombres entiers, ni même de deux nombres fractionnaires; car celui-ci peut toujours se ramener au premier.

Cependant, comme on ne se fait une idée nette des rapports des grandeurs qu'en les ramenant à des rapports de nombres, on est obligé dans ce cas de se contenter d'une simple approximation, et elle est encore préférable à l'idée vague que

l'on se ferait du rapport de deux grandeurs, par la simple connaissance qu'en donneraient les yeux et le toucher. D'ailleurs cette approximation peut être poussée aussi loin qu'on le désire : car on peut partager l'unité en parties aussi petites qu'on veut, et en les portant autant de fois que possible sur la quantité à mesurer, le reste que l'on négligera étant moindre qu'une de ces parties, pourra devenir plus petit que toute quantité donnée, et le rapport que l'on obtiendra différera aussi peu qu'on le voudra du véritable.

Telle est la marche à suivre quand les quantités peuvent être comparées immédiatement par superpositions comme, par exemple, les lignes droites, ou les arcs de cercle décrits de rayons égaux. On cherche d'abord leur commune mesure par le procédé arithmétique du plus grand commun diviseur, et on en déduit, comme nous l'avons dit, leur rapport en nombres entiers.

Mais toutes les quantités ne se prêtent pas avec la même facilité aux superpositions. Ce qui se fait immédiatement pour les lignes droites, serait impossible, par exemple, pour les surfaces de polygones quelconques. Dans ce cas, on cherche à transformer les quantités en d'autres équivalentes, qui puissent être plus facilement divisées en parties égales. C'est ainsi qu'on ramène tous les polygones au triangle, et le triangle au rectangle, parce que deux rectangles sont faciles à décomposer en parties égales.

Ayant ainsi ramené les quantités aux plus simples de leur espèce, on cherche s'il n'est pas possible de ramener celles-ci à des quantités d'une autre espèce et plus faciles à comparer. Nous avons déjà dit que les plus commodes étaient les lignes droites et les arcs de cercle de rayons égaux; ce sera donc à ces deux espèces de grandeurs qu'il faudra tâcher de ramener toutes les autres.

Les angles s'y réduisent facilement, parce qu'ils sont dans le même rapport que les arcs interceptés entre leurs côtés et décrits de leurs sommets comme centre avec des rayons égaux. Le rapport de ces arcs pourra donc être pris pour celui des

angles, et la mesure des angles se trouve immédiatement ramenée à celle des arcs décrits d'un même rayon. C'est ce qu'on exprime en disant qu'un angle au centre a pour mesure l'arc compris entre ses côtés : on veut dire par là que si l'on décrit du même rayon un cercle ayant son centre au sommet de l'unité d'angle, et qu'on prenne l'arc intercepté pour unité d'arc, la mesure de l'angle proposé sera exprimée par le même nombre que celle de l'arc compris entre ses côtés.

Les angles dièdres s'y ramènent immédiatement, parce qu'ils sont dans le même rapport que les angles rectilignes formés par les perpendiculaires à l'arête menées par un même point dans chacun des deux plans.

Les arcs de rayons inégaux s'y ramèneront aussi, parce qu'ils sont entre eux comme les angles au centre multipliés par les rayons. Leur rapport sera donc le produit du rapport de deux angles par le rapport de deux rayons : ce qui rentre dans les cas précédens.

Les polygones pouvant toujours se transformer en rectangles, et ceux-ci étant entre eux comme les produits des nombres qui expriment les rapports de leur base et de leur hauteur à l'unité linéaire, la mesure de toutes les surfaces rectilignes se trouve ramenée à celle des lignes droites. L'unité de surface que l'on choisit ordinairement est le quarré fait sur l'unité de longueur; par là, on s'épargne la mesure de la base et de la hauteur du rectangle pris pour unité, la multiplication des deux nombres résultans et la division des produits relatifs aux deux rectangles. On dit alors qu'un rectangle a pour mesure le produit de sa base par sa hauteur; ce qui signifie, comme on le voit, que son rapport au carré de l'unité linéaire est le produit des rapports de sa base et de sa hauteur à cette même unité. Les volumes des polyèdres se ramènent à ceux des pyramides, ceux-ci aux prismes, et enfin aux parallélépipèdes rectangles, etc., dont la mesure se ramène à celle des lignes droites.

58. Quant à la mesure des cercles et de leurs diverses parties, elle se ramène à celle de leur circonférence et de leur rayon. Mais comme on ne connaît pas encore de moyen de ra-

mener le rapport d'une circonférence à une ligne droite à des rapports de deux arcs de cercle ou de deux droites, on est obligé de se borner à une approximation. Si l'on prenait un cercle pour unité de surface, la mesure d'un autre cercle reviendrait à celle d'un carré, parce que deux cercles sont entre eux comme les carrés de leurs rayons; mais alors la difficulté se retrouverait dans la mesure des surfaces qui ne seraient pas des cercles. C'est après avoir eu égard à toutes les considérations de ce genre qu'on s'est accordé à rapporter toutes les surfaces au carré : lorsqu'on veut ensuite passer à une autre unité, il suffit de prendre la mesure de cette unité par rapport à la première, et de diviser par elle toutes les premières mesures.

Semblablement, la mesure des surfaces cylindriques, coniques, sphériques et des volumes compris par ces surfaces, se ramène à celle des circonférences et des lignes droites, et ne peut par conséquent s'effectuer par des superpositions.

La comparaison des quantités auxquelles on ne peut trouver de commune mesure entre elles, soit qu'elles puissent être supperposées, soit que leur forme ne le permette pas, s'opère au moyen de méthodes particulières qui méritent une attention spéciale, et dont nous allons donner une idée rapide.

Méthodes des limites et de la réduction à l'absurde.

59. La méthode des limites ayant été exposée précédemment, il ne reste plus qu'à montrer comment on l'applique aux quantités géométriques. Supposons d'abord qu'il s'agisse de trouver la relation qui a lieu entre deux rectangles de même hauteur et leurs bases, quand ces bases n'ont pas de commune mesure, sachant que les rectangles sont dans le même rapport que leurs bases, quand elles sont commensurables. Soient R et R' les deux rectangles, et a, a' leurs bases. Imaginons un rectangle R'' de même hauteur, ayant une base $a'' < a'$, et commensurable avec a; on pourra faire approcher a'' de a' autant qu'on voudra, sans cesser d'être commensurable avec a, car il suffira pour cela de décomposer a en parties indéfiniment décrois-

santes, et de les porter autant que possible sur a', le reste sera moindre qu'une de ces parties, et par conséquent deviendra aussi petit qu'on voudra ; a'' a donc a' pour limite; et par suite R'' a pour limite R', puisque leur différence est un rectangle qui a pour base la différence de a' à a''. Or, on a

$$\frac{R''}{R}=\frac{a''}{a}.$$

La relation des limites sera donc $\frac{R'}{R}=\frac{a'}{a}$.

Deux rectangles de même hauteur sont donc toujours entre eux comme leurs bases.

Prenons un second exemple où les quantités puissent avoir une commune mesure, sans qu'on sache la découvrir. Soient deux cercles de rayons différens; on demande la relation entre leurs circonférences et leurs rayons. Pour y parvenir, on cherchera la relation entre des quantités qui puissent s'approcher indéfiniment des deux circonférences; on choisira à cet effet des polygones inscrits; on les prendra, pour plus de simplicité, réguliers; et pour les comparer plus commodément, on leur donnera le même nombre de côtés. Désignant leurs périmètres par P, P', les rayons par R et R', on sait qu'ils satisferont à la relation suivante, quel que soit le nombre de leurs côtés,

$$\frac{P}{R}=\frac{P'}{R'}.$$

Or, on démontre facilement, en circonscrivant des polygones semblables, que P et P' peuvent s'approcher autant qu'on veut des circonférences C, C'; donc la relation de celles-ci sera

$$\frac{C}{R}=\frac{C'}{R'}.$$

Il est inutile de citer un plus grand nombre d'exemples, pour faire concevoir l'esprit de cette méthode, connue sous le nom

de *Méthode des limites.* Il est clair qu'on peut l'appliquer si l'on veut à des quantités qui auraient une mesure commune, et qui seraient moins commodes à comparer que celles qu'on leur substituerait.

60. La seconde méthode à laquelle on donne le nom de *réduction à l'absurde*, consiste à démontrer que la relation demandée est d'une certaine forme, par l'absurdité qu'il y aurait à supposer qu'elle fût de toute autre. Il faut donc assigner d'abord une forme à la relation, puis énumérer toutes celles qui pourraient êtres supposées si celle-là était fausse, et enfin démontrer pour chacune d'elles qu'elle est impossible.

Ainsi dans le premier exemple cité on aurait dit : deux rectangles de même hauteur sont entre eux comme leurs bases, même quand elles sont incommensurables ; car si cette proportion n'a pas lieu, on pourra en établir une entre ces trois premiers termes, et un quatrième qui sera nécessairement plus petit ou plus grand que le correspondant des quatre premiers. On aura alors deux démonstrations à faire, et elles sont si connues que nous ne prendrons pas la peine de les rappeler ici.

Quand au second exemple, on aurait commencé par avancer que deux circonférences sont entre elles comme leurs rayons ; pour cela on aurait supposé que cette proportion fût fausse, et on aurait vu qu'il serait toujours possible d'en former une avec les trois premiers termes et un quatrième plus petit ou plus grand que son correspondant ; ce qui aurait encore conduit à deux démonstrations d'impossibilité.

61. Cette dernière méthode, la seule employée par les anciens, a été conservée jusqu'ici, dans les élémens, avec le même respect que toutes les autres formes que les premiers géomètres employaient, faute des ressources que nous possédons aujourd'hui. Examinons à laquelle des deux on doit donner la préférence.

La méthode de réduction à l'absurde, présentant la vérité sous forme de théorème, suppose connu ce que l'on cherche ; la seconde indique la marche à suivre pour le découvrir ; elle est

donc réellement la méthode d'invention : sous ce rapport, elle mérite la préférence.

Mais, non-seulement elle est supérieure sous le rapport de la marche, elle l'est encore presque toujours dans les détails. Il est généralement plus facile de faire un choix commode de variables, que de disposer les constructions qui doivent faire ressortir l'absurdité, et d'ailleurs il y a toujours plusieurs suppositions à faire, qui entraînent autant de démonstrations distinctes; tandis que par la méthode des limites, on n'a jamais qu'une seule relation à trouver, celle des variables. Il y a plus, la méthode de réduction à l'absurde, déjà inférieure à celle des limites dans les cas où elle peut être employée, devient inapplicable quand on s'éloigne des élémens. La simplicité des relations a permis d'énoncer comme théorème les rapports des cercles et de leurs rayons, d'autant plus qu'on s'y trouvait conduit par la considération des polygones inscrits, qui était aussi indispensable, comme induction, que dans la méthode des limites. Mais quand il s'agira d'évaluer les aires des courbes de nature quelconque, ou en général de trouver des relations compliquées, la forme théorématique deviendra tout-à-fait déplacée, et on sera obligé de revenir à la méthode des limites qui présente toujours un problème, et de plus entre des quantités plus simples que les proposées. Or, puisque cette dernière méthode est indispensable dès qu'on avance dans la science, et qu'elle est déjà supérieure dans les élémens, on doit lui donner constamment la préférence.

CHAPITRE VI.

Géométrie descriptive.

62. CETTE partie de la Géométrie a pour objet de ramener autant que possible les constructions dans l'espace, à des constructions sur un seul plan. A cet effet on rapporte les points à deux plans fixes perpendiculaires entre eux, et on les détermine par les *pieds* des perpendiculaires abaissées de ces points sur les deux plans; ces *pieds* sont ce qu'on appelle les *projections* des points correspondans.

Les lignes se déterminent par la suite des projections de leurs différens points qui forment deux lignes placées respectivement sur les deux plans de projections; de sorte que les lignes dans l'espace, sont l'intersection de deux surfaces cylindriques perpendiculaires aux plans de projections, et ayant respectivement pour directrices les projections de ces lignes.

Quant aux surfaces, on les détermine par les élémens de leur génération. Ainsi une surface conique est donnée par son centre et sa directrice; une surface de révolution par son axe et sa génératrice; et ainsi des autres surfaces dont on donne le mode de génération. De cette manière, toutes les quantités géométriques seront déterminées par des projections faites sur les deux plans rectangulaires, et toutes les constructions dans l'espace se ramèneront déjà à des constructions sur ces deux plans. Enfin, on les réduira toutes à un seul plan, en rabattant l'un des plans de projection sur l'autre par un quart de révolution autour de leur ligne d'intersection, qu'on nomme *ligne de terre*. En opérant ainsi, toutes les constructions s'exécuteront sur un même plan et détermineront celles de l'espace, auxquelles elles ne seront pas identiques, mais qui s'en déduiront par la liaison simple des points avec leurs projections.

63. Or, il ne suffit pas que les constructions dans l'espace soient déterminées par d'autres, il est souvent nécessaire de les connaître par elles-mêmes; et il reste à indiquer les moyens à employer pour construire sur le plan donné, toutes les parties du système dans l'espace, et en déduire ensuite le solide même que l'on voudrait déterminer matériellement.

Si par exemple il s'agit d'une construction plane quelconque dans l'espace, on concevra que le plan où elle est renfermée se rabatte sur l'un ou l'autre des deux plans de projection, ou sur tout autre plan parallèle; on déterminera la position de tous les points après ce rabattement, et on connaîtra alors la véritable forme de ce qui n'était donné d'abord qu'en projection.

S'il s'agissait de construire un polyèdre donné par les projections de tous ses sommets, on commencerait par déterminer, comme il vient d'être dit, la forme de ses différentes faces, et leurs inclinaisons mutuelles. Si l'on voulait ensuite former matériellement ce polyèdre avec un bloc donné, on y tracerait d'abord l'une quelconque des faces; à chacun de ses côtés, on taillerait le bloc suivant des plans faisant avec la base les angles connus; on tracerait sur ces divers plans les faces déterminées précédemment, et on continuerait ainsi jusqu'à la confection entière du polyèdre.

Si l'une des faces du solide était courbe et du genre de celles qui sont engendrées par la ligne droite, on déterminerait toutes les autres faces et leurs inclinaisons, puis on construirait comme tout-à-l'heure le solide correspondant; et il ne resterait plus qu'à tailler la dernière face. C'est à quoi l'on parviendrait en déterminant les points extrêmes de la droite génératrice dans un grand nombre de positions, et taillant le bloc jusqu'à ce que la règle pût s'appliquer exactement sur la surface, depuis un quelconque de ces points jusqu'à son correspondant.

On emploira des procédés analogues dans les cas plus compliqués; on développera sur un plan les surfaces qui en seront susceptibles, et on taillera sous la même forme des matières

flexibles, auxquelles on fera reprendre la forme convenable en les appliquant sur le corps que l'on aura à construire. Une foule de moyens de ce genre sont parfaitement connus des ouvriers; et quand on leur donne les élémens des constructions que fournit la Géométrie descriptive, ils parviennent sans difficulté à la détermination des solides avec toute l'approximation qu'on peut désirer.

La Géométrie descriptive remplit donc deux objets; elle donne par des constructions planes la solution des problèmes de Géométrie dans l'espace, et elle fait connaître tout ce qui est nécessaire à l'exécution matérielle des solides dont on peut avoir besoin dans les arts. Nous n'entrerons pas dans de plus grands détails sur les diverses questions que cette théorie peut offrir; elles se trouvent exposées avec tant de clarté dans les ouvrages de M. MONGE, que nous croyons inutile d'y rien ajouter. Nous nous bornerons à en indiquer les principales applications.

64. La *coupe des pierres* est un des arts qui en tirent le plus grand parti. La construction des *voussoirs* peut devenir tellement compliquée par les diverses circonstances qui se rencontrent dans les édifices, que sans le secours de la Géométrie descriptive il serait quelquefois presque impossible d'en venir à bout. Ces constructions s'exécutent, comme nous l'avons déjà fait connaître, au moyen des faces et de leurs inclinaisons.

65. La *coupe des bois* ou la *charpente* se trouve dans le même cas, et en retire les mêmes avantages par des procédés analogues.

66. La *théorie des ombres*, si utile pour la représentation exacte des corps, se fonde immédiatement sur la Géométrie descriptive; on y a pour objet de déterminer la courbe qui sépare l'ombre de la lumière sur un corps dont on connaît exactement la forme et la position par rapport au point lumineux. Cette courbe n'est autre chose que celle de contact du corps avec une surface conique circonscrite, ayant son centre au point lumineux, ou avec une surface cylindrique parallèle aux rayons de lumière si le point lumineux est à une distance infinie, comme

on le suppose pour la lumière du soleil. Ayant déterminé les projections de cette courbe, il ne s'agit plus que d'en déduire l'effet qui doit en résulter sur le *tableau* où s'exécute le dessin ; problème qui est du ressort de la *perspective linéaire*.

67. La *perspective* a pour objet de *déterminer sur une surface donnée la trace de tous les rayons visuels partant d'un point connu, et terminés aux différens points d'un système de figures quelconque*. La figure qui en résulte sur la surface de perspective produit sur la *rétine* un système identique de forme avec celui que produirait le système donné dans l'espace; et pour rendre l'illusion complète, il n'est plus besoin que de donner aux différentes parties du *tableau* tracé sur la surface, la coloration et le degré de lumière qui se trouvent dans les parties correspondantes des objets donnés. On déterminera alors, comme nous l'avons indiqué précédemment, les projections des courbes de séparation d'ombre et de lumière, et on en déduira l'intersection de la surface du tableau avec le cône qui aurait son centre à l'œil de l'observateur, et pour directrice cette courbe même. Ces *lignes de séparation* sont d'un grand secours pour donner une idée nette des formes en relief, d'après leurs représentations sur une surface qui le plus souvent est plane ; et leur effet est tel, qu'il suffit presque à lui seul pour faire ressortir avec évidence les diverses sinuosités des objets. Mais plus ces lignes sont caractéristiques, plus elles exigent de précision, puisque la moindre erreur influe sur la forme qu'elles font supposer aux corps qu'elles représentent : on ne saurait donc apporter trop de soin à leur détermination, ni trop employer à cet effet les procédés de la Géométrie descriptive. Cette science est en général trop négligée par les artistes, et il en résulte souvent dans leurs tableaux des fautes grossières, des contre-sens choquans, qu'ils auraient évités au moyen des notions élémentaires de la Géométrie descriptive.

68. Il est encore dans la perspective des lignes aussi essentielles que les courbes de séparation d'ombre et de lumière ; ce sont celles que déterminent sur les surfaces, les rayons visuels extrêmes ; on les nomme *courbes apparentes ;* elles séparent

la partie visible de la partie invisible, et déterminent sur le tableau le contour où se termine la perspective de l'objet. Ces courbes ne sont autre chose que celles de contact du corps avec le cône circonscrit ayant son centre à l'œil; on trouve par cette condition leurs projections et par suite leur perspective sur le tableau.

Ayant ainsi déterminé sur le plan du tableau toutes les figures nécessaires, on le rabat sur l'un des plans de projection, et on a ainsi la perspective exacte du système proposé. Il ne reste plus qu'à placer les couleurs, ce qui est du ressort de la peinture. Mais il faut bien se pénétrer de cette vérité, que la perspective linéaire ou *l'esquisse* est la partie la plus essentielle, et que sans elle la perfection dans le reste ne serait rien, tandis qu'elle suffit à elle seule pour représenter les effets principaux.

Il est inutile de pousser plus loin les exemples. Les applications de la Géométrie descriptive s'étendent à toutes les questions où l'on a à considérer des points dans l'espace; l'Architecture, la Topographie, et une foule d'arts mécaniques où l'on a besoin d'une description exacte de machines, en retirent les plus grands avantages; et il serait à désirer que son étude fût regardée comme aussi indispensable dans tous ces arts que les procédés techniques qu'on s'est habitué à regarder comme suffisans.

LIVRE III.

SUR L'APPLICATION DE L'ALGÈBRE A LA GÉOMÉTRIE.

CHAPITRE PREMIER.

De l'objet qu'on se propose dans cette application.

69. Toute quantité étant susceptible d'être exprimée en nombre, il est facile de juger que toutes les questions sur les grandeurs, de quelque nature qu'elles soient, peuvent être ramenées à des questions sur les nombres; car pour déterminer une quantité concrète, on peut se proposer de trouver son rapport à une autre connue de même espèce.

Pour résoudre ainsi par le calcul une question de Géométrie, on imagine d'abord les quantités données et les inconnues exprimées en nombres et représentées par les caractères généraux de l'Algèbre; puis on cherche à établir des équations entre ces nombres d'après les conditions géométriques de l'énoncé. La question étant ainsi transformée, on la résout d'après les procédés de l'Algèbre, et il ne reste plus qu'à repasser du résultat analytique au résultat géométrique, et c'est ce qui peut se faire de plusieurs manières, suivant la nature de la question.

Si l'on s'est proposé de déterminer la valeur numérique d'une ligne (et nous savons que c'est aux lignes qu'on ramène toutes les quantités géométriques), on substitue dans la formule algébrique qui la représente les valeurs numériques trouvées pour l'expression des données en nombres, et l'on trouve ainsi le

nombre d'unités et de parties d'unités contenues dans la ligne cherchée que l'on peut alors facilement construire.

Si au contraire on a pour but de trouver une construction au moyen de laquelle on puisse déterminer la grandeur inconnue d'après les données non exprimées en nombres, alors le passage par l'Algèbre n'a d'autre objet que de faire connaître de quelle manière l'inconnue se compose avec les quantités données en les supposant toutes réduites en nombres, et il ne s'agit plus que de trouver une construction géométrique qui représente cette composition analytique. Il existe des moyens généraux très simples d'opérer ce passage pour toutes les fonctions rationnelles et certaines classes d'irrationnelles.

Enfin, si l'on se propose la démonstration d'un théorème, on cherche à représenter par une équation les relations renfermées dans l'énoncé géométrique, en désignant toujours les nombres par des signes généraux; on exprime ensuite par des équations toutes les relations qui dérivent des données, et on tâche, en les combinant soit entre elles soit avec d'autres connues, d'en déduire celle qui représente l'énoncé géométrique proposé. Le théorème se trouve alors démontré; il n'y a plus besoin, comme dans les deux cas précédens, de repasser de l'analyse à la Géométrie : tout est réduit à un simple calcul, dès qu'on a trouvé la traduction de l'énoncé en langage algébrique.

Tels sont les différens genres de questions que présente l'application de l'Algèbre à la Géométrie; nous allons les examiner successivement, et nous tâcherons de faire connaître l'esprit des diverses théories qu'elles renferment, et des méthodes qu'on y emploie.

CHAPITRE II.

Avantages et inconvéniens des solutions graphiques et numériques.

70. Lorsqu'on a déterminé l'expression algébrique d'une quantité, nous avons dit qu'on pouvait déduire de sa forme une construction au moyen des données géométriques, ou bien exprimer ces données en nombres et les substituer dans la formule qui donne alors la valeur numérique de l'inconnue. Examinons lequel des deux procédés offre le plus d'avantages.

Observons pour cela que l'imperfection des instrumens introduit toujours des inexactitudes dans les constructions. Si donc on tient à une grande approximation dans les résultats, on devra choisir le procédé qui offrira le moins de constructions; c'est là la seule considération qui devra déterminer la préférence.

Dans la résolution numérique on a toutes les erreurs provenant de l'expression des données en nombres; mais le calcul n'en produit pas de nouvelles, ou s'il en introduit, elles peuvent être tellement diminuées qu'elles n'aient pas d'influence sensible sur les résultats, et on peut se dispenser d'y avoir égard. Il ne reste donc plus que l'erreur provenant du passage final de la valeur numérique à la grandeur concrète.

Dans la résolution purement graphique on n'a pas les erreurs de la précédente, puisqu'on n'exprime pas les quantités en nombres, mais on en a d'autres qui sont à la vérité en moindre nombre dans les questions très simples, mais qui deviennent bien plus considérables quand les constructions se compliquent et que les résultats des unes deviennent les élémens de plusieurs autres, comme cela arrive par exemple dans les opérations de Géodésie : dans tous les cas de ce genre, il conviendra

de substituer le calcul aux constructions, ce qui réduira à peu de chose près toutes les inexactitudes à celles des données.

Les opérations qui exigent le plus de précision sont celles de la Géodésie et de l'Astronomie. Dans la première, presque toutes ont pour objet de déterminer la position relative de certains points, et c'est à quoi l'on parvient en les liant par des triangles dont ils sont les sommets. Dans l'Astronomie on a plus souvent à considérer des triangles sphériques, de sorte que dans ces deux sciences qui offrent les applications les plus importantes de la Géométrie, presque toutes les opérations se réduisent à des déterminations de triangles soit rectilignes soit sphériques. En outre, la plus grande partie des problèmes relatifs aux autres théories de la Géométrie peuvent aussi se ramener à de semblables déterminations; d'où il suit que la *Trigonométrie* ou *Théorie de la mesure des triangles* doit jouer le plus grand rôle dans la résolution numérique des questions de Géométrie. Examinons les principes qui lui servent de base.

CHAPITRE III.

De la Trigonométrie.

71. La Trigonométrie a pour objet de déterminer les valeurs numériques des côtés et des angles d'un triangle quand on connaît les valeurs numériques des quantités par lesquelles il est déterminé; c'est ce qu'on appelle résoudre un triangle.

Pour résoudre ce problème dans toutes les circonstances qu'il pouvait offrir, il était nécessaire et suffisant de trouver des relations générales entre les côtés et les angles d'un triangle; car alors la détermination des quantités inconnues se serait ramenée à une simple résolution d'équations. Mais la différence de nature des angles et des côtés conduisant à des relations trop compliquées pour pouvoir être employées avec avantage, on

a renoncé à faire entrer les angles dans le calcul, et on a cherché à leur substituer des quantités qui pussent les déterminer ou être déterminées par eux d'une manière simple, et qui en même temps pussent être facilement comparées avec les côtés des triangles.

La première idée que l'on a eue a été de déterminer les angles par les cordes qu'ils sous-tendent, en supposant leur sommet au centre d'un cercle connu; mais on a abandonné ce moyen pour un autre plus commode. On a supposé semblablement les angles formés par deux rayons d'une circonférence connue, et on les a déterminés soit par la perpendiculaire abaissée de l'extrémité d'un des rayons sur le second, soit par la tangente au cercle menée par l'extrémité d'un des rayons et terminée au second prolongé, soit enfin par la distance du centre au point où ce rayon prolongé rencontre la tangente. Ces trois lignes ont reçu respectivement les noms de *sinus*, *tangente* et *sécante* de l'angle. On a nommé *cosinus*, *cotangente*, *cosécante* du même angle, les sinus, tangente et sécante de son complément; et il est évident que tous les angles moindres que l'angle droit sont entièrement déterminés par une quelconque de ces six lignes; il en serait de même pour les angles compris entre un et deux angles droits, entre deux et trois, entre trois et quatre. Mais quand on ne sait pas d'avance entre lesquelles de ces limites doit se trouver l'angle cherché, il ne suffit plus de donner la valeur d'une ou même de plusieurs de ces lignes, il faut encore y joindre certaines circonstances dont nous parlerons plus tard. Ainsi l'angle détermine sans ambiguité toutes les lignes trigonométriques dont nous avons parlé; tandis que celles-ci peuvent convenir à la fois à plusieurs angles, et nécessitent par conséquent des données de plus pour ôter toute incertitude (*).

Cela posé, on a formé une *table* où l'on place tous les angles de seconde en seconde, ou seulement de minute en minute, depuis zéro jusqu'à un demi-angle droit, ce qui a suffi pour tous les cas, à cause de la symétrie des lignes suivantes. La distance de

(*) Voyez l'Application de l'Algèbre à la Géométrie, de Reynaud.

deux angles consécutifs est assez petite pour qu'on puisse, sans erreur sensible, substituer à un angle quelconque celui qui en approche le plus dans la table; car l'erreur sera toujours moindre que la moitié de cette distance : cette table donnera donc le moyen de déterminer les angles par leurs lignes trigonométriques, et réciproquement; il ne restera plus ensuite qu'à trouver les relations générales qui lient ces lignes avec les côtés des triangles, ce qui n'offre aucune difficulté.

La construction de cette table a offert un travail très long, vu le grand nombre d'angles dont on a été obligé de calculer les lignes trigonométriques. On obtient le sinus et le cosinus d'un angle par le moyen des séries suivantes,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1\ldots.7} + \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1\ldots.6} + \ldots$$

Dans ces séries, x représente le rapport de l'angle proposé à celui auquel est opposé un arc égal au rayon du cercle, et dont la valeur est connue avec beaucoup d'approximation. Comme elles sont très convergentes, il suffira pour chaque valeur de x d'en calculer un très petit nombre de termes; l'erreur sera toujours moindre que le premier des termes négligés (*). Le sinus et le cosinus étant déterminés, on en déduira sans peine les quatre autres lignes, au moyen des relations très simples qui les lient les unes avec les autres.

Connaissant la table des angles et des lignes trigonométriques correspondantes, ainsi que les relations des côtés d'un triangle quelconque avec les lignes trigonométriques de ses angles; on peut résoudre les triangles dans tous les cas où l'on connaît un nombre de données suffisant à leur détermination. Nous n'entrerons pas dans le détail des transformations de toute espèce qu'on peut faire subir aux formules trigonométriques, pour les rendre plus facilement applicables aux différens problèmes

(*) Voyez le nº 186 des Notes de Reynaud sur l'Algèbre.

qu'on peut avoir à résoudre ; nous nous bornerons à la préparation générale qu'on leur fait subir, pour que le calcul des logarithmes y devienne applicable.

CHAPITRE IV.

Sur l'application des logarithmes aux calculs trigonométriques.

72. Les angles croissant dans la table par degrés très petits, les différences entre leurs lignes trigonométriques successives seront, passé un certain point, très petites par rapport à ces lignes. Ces dernières devront donc être exprimées par un grand nombre de chiffres, soit qu'on prenne une unité très grande ou très petite, par rapport au rayon ; le calcul en serait donc très pénible, si on ne le facilitait au moyen des logarithmes : et c'est ce que l'on a pu faire dans tous les cas.

En conséquence, on a cherché les moyens de rendre le calcul des logarithmes d'une application commode pour toutes les formules. On a d'abord joint à la table des lignes trigonométriques celle de leurs logarithmes, pour éviter la peine de les calculer à chaque fois, et on a pu aussi y mettre une plus grande précision, puisque c'était un travail fait une fois pour toutes : on s'est même dispensé de donner les valeurs de ces lignes, et l'on s'est contenté de placer leurs logarithmes à côté de l'angle correspondant. Voilà ce que l'on a fait quant à la disposition de la table : voyons ce que l'on a dû faire dans la préparation des formules.

Pour qu'on puisse déterminer le logarithme d'une expression au moyen de ceux des quantités qui y entrent, il faut que ni celles-ci ni aucune fonction d'elles n'y soient combinées par addition ou soustraction : il est donc nécessaire de transformer toutes

les expressions en produits ou quotiens de puissances quelconques de quantités dont la table fasse immédiatement connaître les logarithmes : tout se réduit donc à indiquer des moyens généraux d'opérer cette transformation.

73. Dans quelques cas particuliers ce problème se résout d'une manière simple, mais à laquelle on n'a cherché à donner aucune extension. On a montré comment on pouvait transformer en produit la somme ou la différence de deux sinus ou de deux cosinus; je vais faire voir comment on y peut ramener la somme ou la différence de deux fonctions monomes quelconques :

Soit l'expression $A \pm B$, dans laquelle A et B désignent deux fonctions monomes quelconques de lignes trigonométriques et autres facteurs. Si chacune de ces fonctions est moindre que le rayon R de la table, on posera $A = \sin x$, $B = \sin y$, et l'on calculera x et y par ces deux équations auxquelles les logarithmes seront immédiatement applicables; il ne restera donc plus qu'à transformer en produit $\sin x \pm \sin y$, ce qui n'offre aucune difficulté. Si A et B ne sont pas plus petits que le rayon R, on les divisera par une quantité K dépendante de leur forme, et telle que les quotiens soient moindres que R; ce qui sera toujours facile à faire, puisqu'il suffira de diviser par le produit de tous les facteurs plus grands que R : on rentrera alors dans le cas précédent, l'expression $K\left(\frac{A}{K} \pm \frac{B}{K}\right)$ devenant $K(\sin x \pm \sin y)$.

Il est inutile de dire qu'on aurait pu semblablement égaler A et B à deux cosinus, puisque leur somme ou leur différence se change aussi facilement en un produit.

74. On peut encore donner un autre moyen général de transformer un binome en un monome.

Si l'on a une différence $A - B$, on la mettra sous la forme $A\left(1 - \frac{B}{A}\right)$. Si $\frac{B}{A}$ est plus petit que l'unité, on pourra égaler $\frac{B}{A}$ au carré d'un sinus ou d'un cosinus, et $A - B$ deviendra $A(1 - \sin^2 x)$ ou $A \cos^2 x$, x étant un angle déterminé par

l'équation $\frac{B}{A} = \sin^2 x$ à laquelle on peut appliquer immédiatement les logarithmes. Si $\frac{B}{A}$ est plus grand que l'unité, on posera $\frac{B}{A} = \sec^2 x$, et il viendra $A - B = A(1 - \sec^2 x) = - A \tang^2 x$.

Si l'on avait au contraire une somme $A + B$, on diviserait par A et on poserait $\frac{B}{A} = \tang^2 x$; ce qui peut toujours avoir lieu, puisque les tangentes passent par toutes les valeurs depuis o jusqu'à l'infini; on aurait alors $A + B = A(1 + \tang^2 x) = A \sec^2 x$.

Ces divers procédés ne sont susceptibles d'aucune exception et donnent le moyen de transformer en un produit la somme ou la différence de deux monomes, et par conséquent de proche en proche d'un polynome quelconque : par là les logarithmes peuvent être appliqués à tous les calculs de la Trigonométrie, et la promptitude des opérations se trouve réunie à la précision des résultats.

CHAPITRE V.

De l'homogénéité en général.

75. Lorsqu'on veut résoudre par le calcul une question sur des quantités d'une nature quelconque, on les suppose toutes exprimées en nombres par rapport à une unité arbitraire de la même espèce, et on cherche à établir des relations entre ces nombres d'après les conditions qui lient entre elles les quantités qu'ils représentent. Si l'on peut parvenir à établir ces équations, il est évident que leur forme sera indépendante de l'unité, puisqu'on n'y a eu nullement égard; les nombres seuls qui expriment les quantités varieront avec l'unité, mais leur combinaison sera toujours la même; et tant qu'ils seront représentés par des sym-

boles généraux, les équations ne subiront aucun changement. Examinons les conséquences qui en résultent sur la forme de ces équations.

Concevons d'abord que l'on ait pris une des quantités données pour unité, les nombres qui représenteront les autres seront leurs rapports avec celle-ci, et c'est entre ces rapports que les équations auront lieu. Que l'on imagine ensuite qu'on passe à une autre unité quelconque, toutes les quantités seront exprimées par des nombres qui seront aux premiers dans le rapport inverse des deux unités, mais leurs rapports entre elles ne changeront pas, et par suite les équations primitives auront encore lieu. Or tous les termes de ces équations, n'étant que des fonctions de ces rapports, contiendront au numérateur et au dénominateur le même nombre de facteurs provenant de l'expression des quantités en nombres : si donc on chasse les dénominateurs, tous les termes auront un même nombre de facteurs marqué par leur dénominateur commun. Cette égalité entre les nombres de facteurs qui se trouvent dans chaque terme et qui proviennent de l'expression en nombres des quantités en question, a reçu le nom d'homogénéité : on voit qu'elle existe dans toutes les équations que peut fournir une question quelconque sur des quantités de quelque nature qu'elles soient. De plus, il est clair qu'elle se conservera dans tous les calculs qui se déduiront de ces premières équations : car les transformations ne feront jamais qu'augmenter ou diminuer également le degré ou le nombre des facteurs de chaque terme; et d'ailleurs rien n'empêche de supposer que l'on ne passe à l'unité arbitraire qu'à la fin du calcul, et nous venons de voir que ce passage produit toujours l'homogénéité.

76. Si la question renfermait des quantités d'espèces différentes, on les supposerait toutes exprimées en nombres au moyen d'une unité de leur espèce respective, et les raisonnemens précédens feront voir que l'homogénéité aura lieu par rapport à chaque espèce en particulier; c'est-à-dire qu'il y aura dans chaque terme un nombre égal de facteurs relatifs aux quantités d'une même espèce : d'où il suit qu'il faut au moins deux quantités de chaque espèce; si la question n'en renfermait qu'une seule, on

serait obligé d'en introduire une autre, et pour que l'équation fût invariable, il faudrait que cette dernière quantité eût une valeur qui s'annonçât dans le calcul par des propriétés spéciales. C'est ce qui a lieu par exemple pour les angles, parce que quelques-uns ont des propriétés que n'ont pas les autres; mais il n'en serait pas de même des lignes, et l'on ne pourrait par conséquent proposer de mettre en équation une question où il n'en entrerait qu'une seule.

Il peut arriver que les quantités d'une même espèce que renferme une question se partagent en classes qui ne puissent se mêler d'une manière quelconque, et qu'elles n'entrent dans une même équation que par leurs rapports avec d'autres de la même classe; c'est ce qui arrive, par exemple, dans la Trigonométrie : les côtés des triangles ne peuvent se combiner arbitrairement qu'entre eux, et toutes les fois qu'on les compare aux lignes trigonométriques, il n'entre dans les équations que les rapports de ces côtés entre eux et de ces lignes entre elles. Dans tous les cas de ce genre il y a homogénéité par rapport à chaque classe, puisque tous les termes ne renferment que des rapports de quantités d'une même classe; et l'unité peut être prise différente pour chacune. Ainsi on pourra prendre le rayon pour unité des lignes trigonométriques, et toute autre ligne pour unité des côtés des triangles.

77. Si dans une question quelconque on prend une des quantités données pour unité, les équations homogènes que l'on pourrait avoir obtenues cessent d'en présenter l'apparence, parce qu'un des facteurs devenant le nombre 1 on se dispense de l'écrire : mais l'homogénéité existe toujours, puisque ce facteur 1 provient de l'expression d'une quantité en nombre, et elle reparaît sous la forme ordinaire dès qu'on passe à une unité arbitraire.

Quelquefois aussi l'homogénéité peut exister sans être apparente, quoiqu'on n'ait fait aucune hypothèse particulière sur l'unité : si l'on considère, par exemple, l'équation du mouvement uniforme $e=vt$ dans laquelle e désigne un espace, v une vitesse, et t un temps, il semble qu'elle a lieu entre trois quan-

tités d'espèces différentes; mais v est le rapport de la vitesse du mobile proposé à celle d'un autre mobile qui dans l'unité de temps parcourrait l'unité de longueur, et l'on substitue ordinairement à ce rapport celui des espaces parcourus; alors le nombre v représente l'espace parcouru par le mobile pendant l'unité de temps et rapporté à l'unité de longueur; il y a donc homogénéité relativement aux espaces. Quant au temps, on observera que l'espace v varie en raison inverse de l'unité de temps, et que par conséquent il peut être considéré comme le quotient d'une quantité indépendante de cette unité par l'expression en nombre d'un certain temps déterminé; l'équation est donc encore homogène par rapport au temps.

Généralement, lorsqu'une équation renfermant plusieurs espèces de quantités ne paraîtra pas homogène par rapport à chacune, on verra que cela tient toujours à ce que les nombres relatifs aux quantités d'une espèce dépendront de l'unité d'une autre, et pourront être considérés comme les rapports de nombres indépendans de cette unité à l'expression en nombre d'une quantité de la seconde espèce : ce qui mettra en évidence l'homogénéité.

Tels sont les principes fondamentaux de l'homogénéité dans l'application du calcul aux grandeurs de toute espèce; on en a beaucoup abusé dans les démonstrations qu'on a voulu donner *à priori* d'un grand nombre de principes sur les différentes branches des Mathématiques; mais il n'entre pas dans mon objet de m'en occuper en ce moment; je n'ai voulu que poser les principes et non critiquer les applications qu'on en a pu faire.

CHAPITRE VI.

Des Problèmes où l'on fait servir le calcul à déterminer une formule de construction.

78. Lorsqu'on a trouvé la formule algébrique qui représente une ligne, on peut, au lieu de la valeur numérique, chercher un procédé de construction qui dans tous les cas semblables conduise à la détermination de cette ligne. Ce procédé constitue ce qu'on peut appeler une formule de construction, et nous allons faire connaître ce que l'on peut établir de général à cet égard.

Considérons d'abord le cas d'une formule algébrique rationnelle, et commençons par la supposer monome : comme elle doit être homogène, il devra y avoir un facteur de plus au numérateur qu'au dénominateur, et elle pourra être mise sous la forme

$$x = \frac{ab}{c} \times \frac{d}{e} \times \frac{f}{g} \cdots$$

On construira d'abord une quatrième proportionnelle m aux lignes c, a, b, elle représentera $\frac{ab}{c}$; on en cherchera une autre aux lignes e, m, d, elle représentera $\frac{ab}{c} \times \frac{d}{e}$; et on continuera ainsi jusqu'au dernier facteur.

Si l'on a un polynome rationnel homogène, on le ramènera facilement à un monome en mettant en facteurs communs tous les facteurs moins un de l'un des termes, et il ne restera plus qu'à faire la somme de lignes exprimées par des monomes fractionnaires et rentrant dans le cas précédent : ainsi, par exemple,

le polynome $abc + def + ghk$ se mettrait sous la forme...
$ab\left(c + \frac{def}{ab} + \frac{ghk}{ab}\right)$, on construirait les lignes représentées par les expressions $\frac{def}{ab}$, $\frac{ghk}{ab}$, on les ajouterait à la ligne c, et le polynome proposé serait devenu le produit de trois lignes connues.

Lorsque l'expression algébrique d'une ligne sera le quotient de deux polynomes rationnels, on ramènera chacun d'eux à un monome et on agira ensuite comme nous l'avons indiqué.

79. Si l'homogénéité n'était pas apparente, on l'établirait en introduisant où il serait nécessaire des facteurs ou diviseurs égaux à l'unité, parce que nous avons vu que cela ne pouvait provenir que de ce que l'on aura pris une des lignes en question pour unité, ce qui l'aura fait disparaître de tous les termes où elle entrait, soit comme facteur, soit comme diviseur.

Mais il y a plus : on peut, sans rien changer au résultat, introduire l'unité comme facteur ou diviseur, même dans les expressions homogènes dont on peut quelquefois faciliter ainsi la construction. Car on ne change pas par là la valeur numérique de l'expression, ni par conséquent la grandeur de la ligne correspondante.

Passons aux expressions radicales. Une racine s'extrayant par la division des exposans, le degré d'un terme soumis à un radical se trouve divisé par l'indice de ce radical ; une ligne sera donc construite par un radical du degré m quand la quantité qui lui sera soumise sera de ce même degré. Les seules racines que l'on puisse extraire par des constructions simples sont celles dont le degré est une puissance de 2 ; elles se réduisent alors à de simples extractions successives de racines carrées ; il suffit donc d'indiquer la construction générale de ces dernières.

Si la quantité dont il faut extraire la racine carrée est du second degré, on la ramènera facilement à un monome composé de deux facteurs, entre lesquels on cherchera une moyenne proportionnelle qui sera la ligne demandée. Si le radical affecte une expression d'un degré différent du second, on commencera par

la réduire à un monome et rendre son degré divisible par 2 en introduisant l'unité comme facteur s'il est besoin : puis on partagera le produit en facteurs du second degré, dont on extraira la racine comme il vient d'être dit, et le radical sera changé en un produit rationnel. On rendra ainsi toute l'expression rationnelle, et on construira ensuite comme nous l'avons indiqué ci-dessus.

Au moyen de ces principes on pourra trouver des formules générales de construction par la ligne droite et le cercle pour tous les problèmes dont la solution analytique conduira à des expressions rationnelles ou renfermant seulement des radicaux dont l'indice soit une puissance de 2.

CHAPITRE VII.

De la détermination des points.

80. Beaucoup de problèmes de Géométrie ont pour objet de construire des points : pour y appliquer le calcul, il a fallu ramener la détermination des points à celle de certaines grandeurs : nous allons faire connaître les divers procédés qu'on a pu employer à cet effet.

On a supposé des objets fixes auxquels on a rapporté tous les autres, et l'on a pu choisir pour cela des points, des droites ou des plans. Si tous les points à considérer sont dans un même plan, on y prendra deux points fixes, et tout point se déterminera par ses distances aux deux premiers, ces données conviendront à deux points différens, excepté le cas où la distance des centres sera égale à la somme ou à la différence des rayons des deux cercles par lesquels on construit le point : la nature de la question déterminera lequel des deux points on doit prendre. On pourra encore déterminer les points par leur distance à un point et une droite fixe, ce qui se construira par la rencontre d'une droite et

d'un cercle en présentant encore une double solution. On pourra aussi les rapporter à deux droites fixes et les déterminer par leurs distances à ces droites; ces distances peuvent être dirigées sous un angle quelconque avec les premières, mais il est plus commode qu'elles leur soient respectivement parallèles. Enfin, on pourra prendre un point et une droite fixes et déterminer tout point par la longueur de la droite qui le joint au premier et par son inclinaison sur la droite fixe. Rien n'empêcherait de supposer un plus grand nombre de systèmes, mais on s'arrête à peu près exclusivement aux deux derniers comme offrant généralement des calculs plus simples, et donnant le moyen d'éviter l'ambiguité des solutions multiples par les signes qui affectent les quantités. Ainsi la détermination des points sur un plan se ramène à celle de grandeurs, soit linéaires, soit angulaires, qui sont dites les *coordonnées* du point qu'elles construisent.

81. Quant aux points situés d'une manière quelconque dans l'espace, on leur appliquera des procédés analogues. On les déterminera par leurs distances à trois points ou à trois droites fixes ou à une combinaison quelconque de points et de droites au nombre de trois : ils se construiront alors par des rencontres de surfaces sphériques ou cylindriques. On peut encore déterminer les points par leurs distances à trois plans fixes, comptées parallèlement aux intersections de ces plans; ou par leurs distances à un point fixe, et les inclinaisons de ces distances sur trois droites fixes menées par le premier point. Enfin, on peut prendre un plan fixe, et par un point de ce plan mener une droite fixe, puis déterminer les points par leur distance au point fixe, par l'angle qu'elles font avec leur projection sur le plan primitif et par l'angle de cette projection avec la droite fixe. On pourrait multiplier à l'infini ces systèmes, mais on n'emploie ordinairement que les trois derniers, par les raisons que nous avons données pour les systèmes relatifs aux points dans un même plan.

Par là tous les problèmes sur la détermination des points revenant à des problèmes sur les grandeurs, les calculs de l'Algèbre y deviendront immédiatement applicables.

Des lieux géométriques des équations.

82. Pour qu'un point soit déterminé sur un plan, il faut que ses deux coordonnées le soient elles-mêmes; il faut donc qu'on ait entre elles deux équations. Chacune de ces équations considérée isolément convient à une infinité de points contigus qui peuvent former une ligne d'une nature quelconque, et les points communs à ces deux lignes sont ceux dont les coordonnées satisfont aux deux équations à la fois; ce seront donc les points cherchés, s'ils ne sont assujettis qu'aux conditions exprimées par ces équations.

On a nommé *lieu géométrique* d'une équation, l'ensemble de tous les points dont les coordonnées satisfont à cette équation : on le construirait en faisant passer l'une des variables par toutes les valeurs possibles d'une manière continue, et déterminant à chaque fois la valeur de la seconde et par suite le point correspondant : on aura ainsi une suite continue de points qui formeront une ligne finie ou infinie, composée d'une ou de plusieurs branches distinctes, suivant la nature de l'équation proposée.

Les lignes peuvent donc être représentées par des équations, et l'on peut faire servir l'Algèbre à la recherche de leurs propriétés : il se présente à ce sujet deux problèmes généraux inverses l'un de l'autre, et qui comprennent toutes les applications de l'Algèbre à la théorie des courbes. Dans l'un on a pour objet de déterminer les propriétés géométriques des courbes d'après leur équation; dans l'autre, de trouver leur équation d'après une propriété géométrique qui les caractérise exclusivement : dans le premier on passe de l'Algèbre à la Géométrie; dans le second de la Géométrie à l'Algèbre.

Si l'on considère les points situés d'une manière quelconque dans l'espace, ils seront déterminés par trois coordonnées; il faudra donc connaître trois équations entre ces quantités. Chacune de ces équations conviendra à une infinité de points, et les points communs à ces trois lieux seront les points cherchés, puisque leurs coordonnées satisferont à la fois aux trois équa-

tions. Ces lieux ne seront plus des lignes, mais des surfaces : car si dans une équation à trois variables on donne une valeur à l'une d'elles, il restera une équation à deux variables qui, d'après les raisonnemens précédens, déterminera une certaine ligne : que l'on fasse maintenant passer la première variable par toutes les valeurs d'une manière continue, on aura une suite indéfinie de lignes contiguës dont l'ensemble ne peut former qu'une surface.

Les surfaces seront donc représentées analytiquement par des équations à trois variables; et les lignes pouvant toujours être considérées comme l'intersection de deux surfaces, se trouveront représentées par deux équations à trois variables : quant aux points, nous avons déjà dit qu'ils le seraient par trois équations. On pourra donc encore appliquer l'Algèbre à la théorie des surfaces et des lignes dans l'espace; et cette application conduira de même aux deux problèmes généraux dont nous avons déjà parlé au sujet des points sur un plan. Examinons la marche qu'il conviendra de suivre dans la résolution de ces problèmes.

Méthode pour trouver les équations des lieux géométriques.

83. Pour trouver l'équation d'une ligne ou d'une surface déterminée par des conditions géométriques données, on considérera un point quelconque de ce lieu, et on exprimera algébriquement, au moyen de ses coordonnées et d'autres quantités connues ou inconnues, toutes les conditions auxquelles ce point est assujetti par la question : il en résultera des équations qui renfermeront le plus souvent, outre les coordonnées du point du lieu, d'autres variables qui en dépendront. Or comme on ne cherche qu'une équation où les seules variables soient ces coordonnées, il faudra, au moyen de ces équations, éliminer toutes les variables étrangères, et l'équation à laquelle on parviendra sera l'équation cherchée : car elle existera entre les coordonnées d'un point quelconque du lieu proposé, et elle ne conviendra

qu'à ces points, si les équations employées représentent fidèlement les conditions géométriques et si le calcul n'a pas introduit de solutions étrangères.

Cette méthode est applicable à la fois aux lignes et aux surfaces. Mais pour ces dernières, quelquefois les données géométriques font connaître leur génération par lignes et non par points : dans ce cas on considérera, non plus un point général, mais une quelconque de ces génératrices ; on déterminera ses équations ainsi que celles qui exprimeront toutes les conditions auxquelles elle est assujettie, et on éliminera de même toutes les variables autres que les coordonnées des points de la génératrice. On serait bien arrivé au même résultat en considérant un point unique; mais ce qu'on aurait voulu exprimer pour ce point seulement, on l'aurait exprimé malgré soi pour toute la génératrice, et tout se serait passé de la même manière.

84. Soient pour exemples les deux problèmes suivans où le lieu est déterminé dans le premier par points, et dans le second par génératrices.

Problème. *Trouver le lieu des points à égale distance de deux points donnés.*

Soient α, β, γ et α', β', γ' les coordonnées des deux points donnés, et x', y', z' celles d'un point quelconque du lieu. Si l'on appelle D et D' les distances respectives de ce dernier aux deux autres, on aura la condition $D = D'$. Pour exprimer que D et D' sont les distances des points en question, on aura

$$D^2 = (x'-\alpha)^2 + (y'-\beta)^2 + (z'-\gamma)^2,$$
$$D'^2 = (x'-\alpha')^2 + (y'-\beta')^2 + (z'-\gamma')^2.$$

Toutes les conditions étant exprimées, il ne reste plus qu'à éliminer les variables D et D', pour avoir une équation entre les coordonnées x', y', z' seulement. Il vient alors

$$(x'-\alpha)^2+(y'-\beta)^2+(z'-\gamma)^2=(x'-\alpha')^2+(y'-\beta')^2+(z'-\gamma')^2,$$

et enfin en réduisant et ordonnant,

$$2(\alpha'-\alpha)x'+2(\beta'-\beta)y'+2(\gamma'-\gamma)z'+(\alpha^2-\alpha'^2)+(\beta^2-\beta'^2)$$
$$+(\gamma^2-\gamma'^2)=0.$$

Cette dernière équation existant entre les coordonnées d'un point quelconque du lieu, est l'équation même de ce lieu.

PROBLÈME. *Trouver le lieu des intersections successives de deux plans perpendiculaires entre eux et passant respectivement par deux droites données dans l'espace.*

Soient les équations des deux droites données

$$x = az + \alpha, \quad x = a'z + \alpha',$$
$$y = bz + \beta, \quad y = b'z + \beta';$$

les équations des deux plans seront de la forme

$$Ax + By + Cz + D = o, \quad A'x + B'y + C'z + D' = o.$$

On exprimera qu'ils passent respectivement par chacune des deux droites, au moyen des équations suivantes :

$$Aa + Bb + C = o, \quad A'a' + B'b' + C' = o,$$
$$A\alpha + B\beta + D = o, \quad A'\alpha' + B'\beta' + D' = o;$$

la condition qu'ils soient perpendiculaires entre eux donnera

$$AA' + BB' + CC' = o.$$

Ces cinq dernières équations exprimant toutes les conditions données, et les équations des deux plans ayant lieu pour tous les points de leur droite d'intersection qui est la génératrice du lieu proposé, il suffira d'éliminer entre ces sept équations les huit variables $A, B, C, D, A', B', C', D'$, pour avoir une équation entre les coordonnées d'un quelconque des points d'une quelconque des génératrices, c'est-à-dire l'équation du lieu.

Il semble d'abord que les sept équations doivent être insuffisantes pour éliminer les huit coefficiens variables; mais on observera que ces derniers peuvent être réduits à six en divisant les équations des deux plans par un de leurs coefficiens. Leur élimination est donc possible de cette manière; elle le sera donc aussi sans cette préparation, puisque les équations ne seront changées que par la simple suppression d'un facteur; et on verra en effet, par le calcul, qu'après l'élimi-

nation de six des coefficiens, les deux autres disparaîtront d'eux-mêmes de l'équation finale où ils seront facteurs à tous les termes.

Des Solutions étrangères.

85. De quelque manière que l'on effectue l'élimination des variables auxiliaires, l'équation finale a lieu pour tous les points du lieu, si les équations primitives leur convenaient à tous; car toute combinaison d'équations satisfaites le sera aussi par les mêmes valeurs. Mais il peut se faire que le résultat contienne des solutions étrangères à la question, et cela pourra arriver de plusieurs manières. Cela peut tenir d'abord à ce que les conditions géométriques n'ont pu être exprimées par des équations qui ne s'appliquassent qu'à elles seules, ou à ce que l'élimination aura introduit des solutions qui ne se trouvaient pas dans les équations primitives; et dans ces deux cas il est facile quelquefois d'en débarrasser l'équation finale, comme il peut se faire aussi qu'elles y restent sans qu'il y ait aucun moyen de les en faire disparaître.

Lors donc qu'on effectuera quelque élimination, il faudra examiner avec soin si les divers résultats intermédiaires n'admettent aucune autre solution que les équations d'où on les déduit; s'il s'en trouve et qu'on ne puisse les supprimer, il faudra les suivre dans tout le cours du calcul et voir de quelle manière elles modifient l'équation finale. Il peut arriver que ces solutions soient susceptibles d'en être extraites, bien qu'elles n'aient pu disparaître des équations précédentes, et alors elles n'affecteront en rien le résultat cherché; dans le cas contraire, on se bornera à ne tenir aucun compte tant de ces solutions que de tout ce qui s'y rapportera. Il serait difficile de donner des règles générales sur ce point, et nous nous bornerons à quelques exemples que nous généraliserons autant que possible.

86. Lorsque les points d'un lieu sont déterminés par une droite passant par un point constant, il arrive souvent que les coordonnées de ce point, satisfont à l'équation finale sans

convenir à la question ; car alors l'équation de cette droite est de la forme $y-\beta=A(x-\alpha)$, β et α étant les coordonnées du point fixe par lequel elle passe. Or, s'il entre dans A comme facteur au premier degré, une des quantités à éliminer, son expression sera de la forme $\frac{m(y-\beta)}{x-\alpha}$; et reportée dans les autres équations, elle les rendra satisfaites par $y=\beta$, $x=\alpha$; parce que tous les termes auront pour facteur $y-\beta$ ou $x-\alpha$, quand on aura chassé les dénominateurs. Si donc ces équations n'admettaient pas d'abord cette solution, elle sera étrangère, et on ne pourra cependant se dispenser de l'introduire.

87. Plus généralement, si une des variables à éliminer se présente sous la forme $\frac{AF(x,y)}{F_1(x,y)}$, les deux fonctions F et F_1 ne renfermant aucune autre variable que x, y, il est clair que les équations résultantes de cette substitution admettront toutes les solutions des deux équations $F(x,y)=0$, $F_1(x,y)=0$, qui presque toujours seront étrangères à la question. Il arrive quelquefois qu'elles se suppriment d'elles-mêmes de l'équation finale; c'est ce qu'on verra, par exemple, dans le problème suivant :

Problème. *Trouver le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un foyer de l'ellipse sur ses tangentes.* Soit l'équation de l'ellipse $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$. Désignons par x', y' les coordonnées d'un quelconque de ses points, et par c l'abscisse du foyer ; il est facile de voir qu'on aura à éliminer x' et y' entre les trois équations suivantes,

$$a^2yy'+b^2xx'=a^2b^2,$$
$$a^2y'^2+b^2x'^2=a^2b^2,$$
$$y=\frac{a^2y'}{b^2x'}(x-c).$$

Or, si l'on tire y' de la dernière, on obtient

$$y'=\frac{{}^2x'y}{a^2(x-c)},$$

et la substituant, les équations résultantes admettront y ou $x-c$, comme facteurs à tous leurs termes ; elles seront donc satisfaites par $y=0$ et $x=c$, ce qui donne le foyer par où passent toutes les perpendiculaires ; de plus, il est facile de voir que cette solution sera étrangère à la question, car elle ne satisfait pas à la première équation. Achevant le calcul, on trouve une équation finale qui peut se mettre sous la forme

$$[y^2+(x-c)^2](y^2+x^2-a^2)=0.$$

Or, le facteur $y^2+(x-c)^2$ étant égalé à 0, donne précisément le foyer pour unique solution. Le supprimant donc, il reste pour le lieu cherché l'équation $y^2+x^2-a^2=0$, qui détermine le cercle décrit sur le grand axe.

88. Voici maintenant un exemple du cas où la solution étrangère ne saurait disparaître du résultat :

PROBLÈME. *Trouver le lieu des points obtenus en prolongeant d'une quantité constante les rayons menés d'un point fixe à une droite donnée.*

En prenant le point fixe pour origine, et désignant par a et b la distance du point à la droite donnée et la quantité constante dont on prolonge les rayons, une simple proportion conduit à l'équation suivante entre les coordonnées du lieu,

$$y-a=\frac{by}{\sqrt{y^2+x^2}}.$$

Chassant le dénominateur, on a la solution $y=0$, $x=0$, qui est évidemment étrangère, et ne peut cependant être supprimée de l'équation.

CHAPITRE VIII.

Sur la discussion des Équations des lieux plans.

89. QUAND on veut discuter le lieu plan d'une équation à deux variables et que cette équation peut être résolue par rapport à l'une d'elles, on donne successivement à l'autre toutes les valeurs depuis o jusqu'à $\pm \infty$, et on voit quelles valeurs correspondent à chaque fois pour la première variable. On peut s'assurer par là si le lieu est fini ou infini, continu ou composé de plusieurs branches séparées, si les points vont en s'éloignant ou en s'approchant des axes des coordonnées, et l'on suivra ainsi d'une manière approximative le cours général de la courbe. Mais lorsqu'on en voudra connaître la nature d'une manière plus approfondie, il faudra pouvoir déterminer en chaque point quelle est la direction de son cours, de quel côté elle tend à s'infléchir, de quelle manière varie sa courbure, etc., etc., et beaucoup d'autres propriétés qui concourent à donner une idée nette de son étendue et de sa forme. Nous allons examiner les principales d'entre elles et indiquer les moyens généraux de les découvrir.

Des droites Tangentes et des Normales.

90. On appelle *tangente* en un point d'une courbe, la limite vers laquelle tend une sécante qui tourne autour de ce point, et dont un des autres points d'intersection avec la courbe se rapproche indéfiniment de ce premier point.

En considérant la courbe comme limite d'un polygone rectiligne inscrit et dont les côtés décroissent indéfiniment, on voit que la tangente en un point est la limite de la direction d'un des côtés ou élémens du polygone; et c'est ce que l'on

exprime en disant que la tangente indique la direction de l'élément de la courbe au point de contact.

91. Pour déterminer l'équation de la tangente en un point donné, il suffira, d'après ce que nous venons de dire, de calculer l'angle que tend à faire avec l'axe des x la sécante menée par ce point, et dont la corde interceptée tend à devenir nulle. Soient donc x', y' les coordonnées du point donné, et $F(x,y)=0$ l'équation de la courbe; la sécante aura une équation de la forme $y-y'=m(x-x')$, et il ne s'agit plus que de déterminer la limite de m.

Concevons pour cela qu'on transporte l'origine au point x', y', l'équation de la courbe deviendra

$$F(x'+x, y'+y)=0,$$

ou en développant comme nous l'avons vu (n° 39),

$$0=F(x',y')+F'(x')x+F'(y')y+Ax^2+Bxy+Cy^2+Dy^3+\ldots,$$

équation qui se réduit à la suivante, puisque $F(x',y')$ est nul, vu que le point donné est sur la courbe

$$0=F'(x')x+F'(y')y+Ax^2+\ldots$$

L'équation de la sécante devient $y=mx$, et pour avoir ses intersections avec la courbe, il faut chercher les solutions communes à leurs équations. Reportant donc dans la première la valeur d'y tirée de la seconde, on aura pour déterminer les abscisses des points de rencontre,

$$0=F'(x')x+F'(y')mx+Ax^2+Bmx^2+Cm^2x^2+\ldots;$$

équation qui donne d'abord $x=0$, ce qui devait être, puisque l'origine est sur la courbe : supprimant le facteur x, il vient

$$0=F'(x')+mF'(y)+Ax+Bmx+\ldots.$$

Or, pour qu'un second point de rencontre vienne se réunir à l'origine, il faut que cette équation ait une seconde solution nulle, ce qui donne la condition

$$F'(x')+mF'(y')=0;$$

d'où l'on déduira la valeur de m lorsque la sécante se réduit

à la tangente : cette valeur est $m = -\frac{F'(x')}{F'(y')}$; la reportant dans l'équation générale de la droite qui passe par le point x', y', on aura pour l'équation de la tangente

$$y - y' = -\frac{F'(x')}{F'(y')}(x - x').$$

92. On appelle *normale* la perpendiculaire à la tangente menée au point de contact; son équation se déduira donc facilement de la précédente d'après la condition connue qui exprime que deux droites sont perpendiculaires entre elles : cette équation sera, si l'on suppose les coordonnées rectangulaires,

$$y - y' = \frac{F'(y')}{F'(x')}(x - x').$$

Si les axes font entre eux un angle quelconque θ, l'équation de la normale deviendra

$$y - y' = \frac{F'(y') - F'(x')\cos\theta}{F'(x') - F'(y')\cos\theta}(x - x').$$

93. Problème. *Trouver l'équation d'une tangente ou d'une normale menée par un point non situé sur la courbe.*

Soient α, β les coordonnées du point par lequel on veut mener la tangente; désignons par x', y' celles du point de contact, on aura d'abord $F(x', y') = 0$.

L'équation de la tangente sera de la forme

$$y - y' = -\frac{F'(x')}{F'(y')}(x - x');$$

on exprimera qu'elle passe par le point α, β au moyen de l'équation

$$\beta - y' = -\frac{F'(x')}{F'(y')}(\alpha - x'),$$

qui, jointe à $F(x', y') = 0$, déterminera les coordonnées x', y' des points de contact. Le nombre des tangentes sera égal à celui des solutions réelles du système de ces deux équations.

Les points de contact pourront être déterminés géométriquement par l'intersection de la courbe donnée, avec celle que représenterait l'équation $\mathcal{C}-y'=-\frac{F'(x')}{F'(y')}(\alpha-x')$, dans laquelle on traiterait x' et y' comme variables.

Dans le cas des courbes du second degré, cette dernière équation se réduit à celle d'une ligne droite, et fournit une construction très simple du problème.

On ferait des calculs du même genre pour la normale.

94. Problème. *Trouver l'équation d'une tangente ou d'une normale parallèle à une ligne donnée.*

Soit $y=mx$ l'équation de la droite donnée; il faudra, pour la tangente cherchée, que l'on ait $\frac{-F'(x')}{F'(y')}=m$, équation qui, jointe à $F(x',y')=0$, déterminera les points de contact. Le problème pourra encore se construire par l'intersection de la courbe donnée, et de celle que représenterait l'équation

$$\frac{-F'(x)}{F'(y)}=m.$$

Cette dernière se réduira encore à une droite, dans le cas des courbes du second degré.

S'il s'agissait d'une normale, on aurait à résoudre les deux équations

$$F(x',y')=0,\quad \frac{F'(y')}{F'(x')}=m.$$

On peut par là déterminer les limites de la courbe dans le sens des x ou des y; il suffit de chercher les points où la tangente est parallèle à l'un ou l'autre des axes. Il faut en excepter le cas particulier où la courbe aurait en ces points, ce qu'on nomme une *inflexion*, c'est-à-dire un changement de sens dans sa courbure; alors elle traverse la tangente au point de contact, et la limite dont nous parlons n'existe plus.

95. Problème. *Trouver l'expression générale des sous-tangentes et sous-normales.*

On appelle ainsi les parties de l'axe des x comprises entre le pied de l'ordonnée du point de contact, et les points où l'axe des x est coupé par la tangente et la normale.

Cela posé : soient x', y', les coordonnées du point de contact M (*fig.* 9); TP et PN seront respectivement la sous-tangente et la sous-normale. Or, par la propriété du triangle rectangle, on aura TP $= y'$ tang TMP et PN $= y'$ tang PMN, ou en remettant les valeurs de ces tangentes

$$\mathrm{TP} = \frac{-y'\mathrm{F}'(y')}{\mathrm{F}'(x')}, \quad \mathrm{PN} = \frac{-y'\mathrm{F}'(x')}{\mathrm{F}'(y')}.$$

Voyons ce que deviendront ces formules quand les axes des coordonnées feront entre eux un angle θ, différent de l'angle droit. Si l'on désigne par α l'angle de la tangente avec l'axe des x, on aura TP par la proportion $\mathrm{TP} : y' :: \sin(\theta-\alpha) : \sin\alpha$;

$$\text{d'où}\quad \mathrm{TP} = \frac{y'\sin(\theta-\alpha)}{\sin\alpha}. \quad \text{Or,}\quad \frac{\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)} = -\frac{\mathrm{F}'(x')}{\mathrm{F}'(y')}.$$

On aura donc pour la sous-tangente, la même formule

$$\mathrm{TP} = \frac{-y'\mathrm{F}'(y')}{\mathrm{F}'(x')}.$$

Pour déterminer la sous-normale, on aura la proportion

$$\mathrm{PN} : y' :: \sin \mathrm{PMN} : \sin \mathrm{MNP} :: \cos(\theta-\alpha) : \cos\alpha;$$

$$\text{d'où}\quad \mathrm{PN} = y'\frac{\cos(\theta-\alpha)}{\cos\alpha} = y' \times \frac{\mathrm{F}'(x') - \mathrm{F}'(y')\cos\theta}{\mathrm{F}'(x')\cos\theta - \mathrm{F}'(y')}.$$

On peut encore tirer immédiatement les formules précédentes des équations mêmes des tangentes et normales, en cherchant la valeur de $x - x'$ correspondante à $y = 0$. Ce moyen est le plus simple et le plus analytique, et je n'ai présenté le précédent que pour offrir une application des transformations trigonométriques.

Du centre des courbes.

96. On appelle *centre* un point tel que toute sécante qui

y passe à ses points de rencontre avec la courbe situés deux à deux à égale distance de ce point. D'où il résulte d'abord que quand des courbes de degré impair auront un centre, il sera sur la courbe même, puisque les sécantes donneront généralement un nombre impair de rencontres; dans les courbes de degré pair, au contraire, il sera hors de la courbe, à moins que dans ses diverses sinuosités elle n'y vienne passer un nombre pair de fois.

Une remarque importante à faire, c'est qu'une courbe ne peut avoir qu'un seul centre, ou qu'elle en a une infinité. Soient en effet A, A′ (*fig.* 3) deux centres d'une même courbe, et M un quelconque de ses points. Si l'on mène la droite MA et qu'on la prolonge d'une quantité égale en M′, ce point appartiendra encore à la courbe, puisque A en est un centre. Si de même on joint MA′, M′A′, et qu'on les prolonge de quantités respectivement égales en N, N′, la droite NN′ sera parallèle à MM′ et coupera AZ en un point A″ tel que A′A″ = AA′; de plus on aura A″N = A″N′, puisque MA = M′A; d'où il suit que le point A″ sera encore tel, qu'une sécante dans une direction quelconque aura ses points d'intersection situés deux à deux à égale distance de ce point; il sera donc encore un centre de la courbe. Semblablement les deux centres A′, A″ en détermineraient un troisième à la même distance de A″ et en ligne droite avec les trois premiers; et ainsi de suite indéfiniment des deux côtés du point A; car on peut faire à gauche ce que l'on vient de faire à droite : d'où il suit que si une courbe a deux centres, elle en a nécessairement une infinité en ligne droite avec les deux premiers et distribués tous à égale distance dans les deux sens indéfinis de cette droite.

Il est facile de juger que si tous les points de la courbe se transportaient parallèlement à la ligne des centres d'une quantité égale à AA″, ils viendraient coïncider avec d'autres points de la courbe. D'où il suit qu'une pareille courbe coïncide toujours avec elle-même, quand on la transporte parallèlement à la ligne des centres et d'une quantité égale à un nombre pair de fois la distance de deux centres. Si cette dernière

distance était nulle, tous les points de la droite seraient des centres, et quelque mouvement qu'on donnât à la courbe parallèlement à cette ligne, elle coïnciderait toujours avec elle-même; ce qui ne peut convenir qu'à un système de droites parallèles à la ligne des centres.

97. Il résulte encore de ce qui précède, qu'une courbe dont l'équation est algébrique ne peut jamais avoir qu'un seul centre; car, si elle en avait deux, toutes les lignes parallèles à la droite qui les joindrait, rencontreraient la courbe en un nombre infini de points, ce qui est impossible. Il faut toutefois en excepter le cas où l'équation représenterait un système de droites parallèles.

98. Cela posé, voyons comment, étant donnée l'équation d'une courbe, on pourra déterminer les coordonnées de son centre, ou s'assurer qu'elle n'en a pas. Or, d'après la définition que nous avons donnée du centre, il est clair que si on le choisit pour origine et que x, y désignent les coordonnées d'un point quelconque de la courbe, $-x$ et $-y$ seront encore celles d'un autre de ses points; il faut donc, dans ce cas, que l'équation ne change pas quand x et y changent en même temps de signe; ce qui nécessite que tous les termes soient de degré pair, par rapport aux deux variables, ou bien tous de degré impair; parce qu'alors ils resteront les mêmes, ou changeront de signe à la fois, et l'équation restera la même. Réciproquement, l'une ou l'autre de ces circonstances est évidemment suffisante.

D'où il résulte que pour trouver le centre d'une courbe donnée par son équation, il faut, après s'être assuré qu'il n'est pas à l'origine même, transporter celle-ci en un point quelconque du plan, et voir si l'on peut déterminer les coordonnées de ce point de manière qu'il ne reste dans l'équation aucun terme de degré impair si la courbe est de degré pair, et aucun terme de degré pair si la courbe est de degré impair : car on sait que dans cette transformation les termes du plus fort degré ne peuvent disparaître et restent tels qu'ils étaient. On obtiendra ainsi un certain nombre d'équations où il n'y aura d'inconnues que les coordonnées de l'origine, et

si elles peuvent être toutes satisfaites en même temps, la courbe aura un centre qui sera la nouvelle origine.

Quand la courbe est de degré impair, le terme indépendant d'x et d'y disparaissant quand on la rapporte à son centre, on voit se vérifier ce que nous avions déjà démontré *à priori*, savoir, que le centre se trouvera sur la courbe même.

Le centre des courbes algébriques est donc toujours facile à déterminer, et l'on verra, en prenant une équation générale, qu'il suffira de résoudre deux équations du premier degré; d'où l'on conclura encore qu'il n'y aura qu'un seul centre si ces équations ne sont pas indéterminées. Dans le cas où elles le seraient, ainsi que toutes les autres équations de condition, il suffirait alors que la première fût satisfaite pour que toutes le fussent, et comme elle est du premier degré, elle construit une droite dont tous les points seront des centres; ce qui ne conviendra, comme nous l'avons déjà dit, qu'à un système de droites parallèles.

Lorsqu'on aura à discuter une courbe à centre, il sera généralement avantageux de prendre ce point pour origine, tant à cause des termes qui manqueront nécessairement dans l'équation, que pour toutes les autres simplifications qu'introduira la symétrie de la courbe par rapport à ce point.

Des Diamètres des Courbes.

99. On nomme diamètre d'une courbe, le lieu des milieux d'un système de cordes parallèles : ce lieu peut-être une courbe d'un degré quelconque, qui se trouvera déterminée par celui de la proposée.

Soit $F(x, y) = 0$, l'équation d'une courbe donnée, et soit proposé de trouver l'équation du diamètre des cordes parallèles à la droite $y = mx$.

Désignons par x', y', les coordonnées du milieu d'une quelconque de ces cordes, et concevons qu'on y transporte l'origine; l'équation de la courbe deviendra $F(x + x', y + y') = 0$, et celle de la sécante sera $y = mx$. Pour que l'origine soit au

milieu d'une des cordes produites par cette sécante, il est nécessaire et suffisant que l'équation en x résultante de l'élimination d'y entre l'équation de la courbe et celle de la sécante, ait deux racines égales et de signes contraires. Cette équation sera $F(x+x', mx+y')=0$, et la condition dont nous venons de parler, s'exprimera par une équation entre ses coefficiens. Cette dernière ne contenant de variables que x' et y', sera l'équation du lieu de tous les milieux des cordes parallèles à la direction donnée.

100. En appliquant cette méthode à l'équation générale du second degré

$$ay^2+bxy+cx^2+dy+ex+f=0,$$

on trouve pour l'équation finale en x

$$a(mx+y')^2+b(x+x')(mx+y')+c(x+x')^2$$
$$+d(mx+y')+e(x+x')+f=0.$$

Or, pour qu'elle ait deux racines égales, et de signes contraires, il faut que le terme du premier degré disparaisse, ce qui donne

$$(2am+b)y'+(bm+2c)x'+dm+e=0.$$

Cette équation étant du premier degré, apprend que tous les diamètres des courbes du second degré, sont des lignes droites.

En l'ordonnant par rapport à m, elle devient

$$m(2ay'+bx'+d)+2cx'+by'+e=0,$$

et sera satisfaite, quel que soit m, par les valeurs de x' et y', qui satisferont aux deux conditions

$$2ay'+bx'+d=0, \quad 2cx'+by'+e=0.$$

Or, ces équations sont précisément celles qui déterminent les coordonnées du centre de la courbe; d'où il suit que tous ses diamètres passent par le centre, et par conséquent deviennent parallèles, quand ce centre s'éloigne à l'infini.

101. Ayant l'équation générale des diamètres d'une courbe en fonction de la quantité m, qui détermine la direction des cordes, on trouvera les diamètres rectilignes, s'il en existe, en cherchant quelles sont les valeurs de m qui introduiront dans cette équation des facteurs rationnels du premier degré en x, y : de plus, on verra sans peine si parmi ces diamètres il y en a qui soient perpendiculaires sur leurs cordes; auquel cas on leur donne le nom particulier d'*axes*.

Des Asymptotes.

102. Une ligne d'une nature quelconque, est dite asymptote d'une courbe, lorsqu'à partir d'un de ses points, elle s'approche indéfiniment de cette courbe, sans jamais la rencontrer, quelque loin qu'on les suppose prolongées l'une et l'autre.

Les asymptotes rectilignes, les seules dont nous nous occuperons ici, peuvent encore être considérées comme les limites des tangentes, dont le point de contact s'éloignerait à l'infini; et plus généralement encore comme les limites des sécantes dont la corde interceptée s'éloignerait indéfiniment sur la courbe, en restant d'une grandeur constante, ou variant d'une manière quelconque entre des limites finies. Soit en effet l'asymptote UV, et MN la corde interceptée; les deux points M et N allant en s'éloignant indéfiniment sur la courbe, leurs distances à UV ont pour limite zéro, et par conséquent l'asymptote est la limite de la sécante. De plus, il est évident que cela ayant lieu, quelque rapprochés que soient les deux points M et N, il en sera de même quand ils coïncideront, et l'asymptote sera encore la limite des tangentes, dont le point de contact s'éloignera à l'infini.

103. Problème. *Trouver les asymptotes parallèles aux axes des coordonnées.* Pour qu'il y ait une asymptote parallèle à l'axe des x, il faut que la valeur d'y tende vers une quantité finie, lorsque x tend vers l'infini, et réciproquement cette condition est suffisante. On n'aura donc qu'à diviser les deux membres de l'équation par la plus forte puissance d'x qui s'y trouve, et

voir si l'équation à laquelle elle tend à se réduire quand x tend vers l'infini, peut être satisfaite par des valeurs réelles et finies d'y. Soient $a, b, c\ldots$ ces valeurs, les asymptotes parallèles à l'axe des x auront respectivement pour équations.

$$y=a,\quad y=b,\quad y=c\ldots.$$

Si au contraire l'équation résultante en y n'avait pas de valeurs réelles et finies, il n'y aurait évidemment aucune asymptote parallèle à l'axe des x.

On peut observer qu'une des conditions pour que cette équation soit possible, c'est que le plus fort exposant de x soit moindre que le degré de l'équation proposée, sans quoi quand on ferait tendre x vers l'infini après la division, tous les termes qui le contiendraient en dénominateur convergeraient vers zéro si y tendait vers une valeur finie, et il ne resterait que le coefficient du premier terme en x, lequel devrait tendre vers zéro, ce qui est absurde. La même chose aurait lieu si le terme du plus fort degré en x était unique et avait un coefficient indépendant d'y. D'où il suit que dans l'un et l'autre cas, y ne saurait tendre vers une quantité finie quand x devient infini, et que par conséquent il n'y aura pas d'asymptotes parallèles à l'axe des x.

On ferait les mêmes raisonnemens pour l'axe des y.

104. Appliquons cette méthode à l'équation du second degré; et comme il n'y aurait pas lieu à chercher les asymptotes parallèles à l'axe des x si le terme du second degré en x s'y trouvait, supposons-lui la forme

$$ay^2+bxy+cy+dx+e=0.$$

Divisant par x, il vient $\frac{ay^2}{x}+by+\frac{cy}{x}+d+\frac{e}{x}=0$,

équation qui est satisfaite quand x tend vers l'infini et y vers la valeur finie qui donne $by+d=0$; il y a donc une asymptote ayant pour équation $y=-\frac{d}{b}$, excepté le cas où $b=0$.

Semblablement, si le terme en y^2 manquait, on trouverait

une asymptote parallèle à l'axe des y et ayant pour équation $x = -\frac{c}{b}$, à moins encore que l'on eût $b = 0$.

Or on sait que quand le rectangle xy se trouve dans l'équation et que l'un des carrés x^2 ou y^2 manque, la courbe est nécessairement une hyperbole : d'où il suit que l'hyperbole est la seule courbe du second degré qui puisse avoir des asymptotes parallèles aux axes des coordonnées; et comme ces axes peuvent prendre toutes les directions possibles, les courbes du second degré autres que l'hyperbole ne pourront avoir aucune asymptote rectiligne.

105. Problème. *Trouver les asymptotes non parallèles aux axes.* Il suffira pour cela de changer la direction de l'axe des x, et de déterminer toutes les inclinaisons sous lesquelles il devient parallèle à quelque asymptote. En supposant donc les premiers axes rectangulaires, on fera

$$x = x' \cos \alpha, \quad y = x' \sin \alpha + y',$$

et on cherchera les valeurs d'α pour lesquelles l'équation résultante donnera des asymptotes parallèles à l'axe des x'. Soient $y' = a, y' = b, \ldots$ les équations de ces asymptotes; on repassera au premier système en remplaçant y' par sa valeur en x et y, qui est $y - x \text{ tang } \alpha$, et on remplacera α par les valeurs respectives que l'on aura déterminées.

Soit, pour exemple, l'équation

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0;$$

elle devient par la substitution des valeurs de x et y,

$$(1) \ldots \left\{ \begin{array}{l} a(y'^2 + 2x'y' \sin \alpha + x'^2 \sin^2 \alpha) + bx' \cos \alpha (y' + x' \sin \alpha) \\ \quad + cx'^2 \cos^2 \alpha + d(y' + x' \sin \alpha) + ex' \cos \alpha + f = 0. \end{array} \right.$$

Or, pour qu'il y ait une asymptote parallèle à l'axe des x', il faut que le terme du second degré en x' disparaisse; ce qui donne $\quad a \sin^2 \alpha + b \sin \alpha \cos \alpha + c \cos^2 \alpha = 0,$

d'où $\quad a \text{ tang}^2 \alpha + b \text{ tang } \alpha + c = 0;$

on tire de là $\quad \text{tang } \alpha = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$

Divisant maintenant l'équation (1) par x', puis faisant x' infini, il vient $y'(2a \sin\alpha + b\cos\alpha) + d\sin\alpha + e\cos\alpha = 0$, d'où

$$y' = -\frac{d\sin\alpha + e\cos\alpha}{2a\sin\alpha + b\cos\alpha} = -\frac{d\tang\alpha + e}{2a\tang\alpha + b}.$$

Remplaçant y' par sa valeur en x et y, cette équation devient

$$y - x\tang\alpha = -\frac{d\tang\alpha + e}{2a\tang\alpha + b},$$

et remettant enfin au lieu de tang α chacune des valeurs trouvées précédemment, on aura les équations des deux asymptotes qui seront

$$y = \left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)x - \frac{d}{2a} \pm \frac{bd - 2ae}{2a\sqrt{b^2 - 4ac}}.$$

On voit que si $b^2 - 4ac$ est négatif, tang α est imaginaire; si $b^2 - 4ac = 0$, tang α devient $\frac{-b}{2a}$, et le dénominateur $2a\tang\alpha + b$ devient nul : il ne peut donc y avoir d'asymptotes que quand on a $b^2 - 4ac > 0$, ce qui n'a lieu que pour l'hyperbole.

De la Concavité, de la Convexité et des Inflexions.

106. Soit M (*fig.* 5) un point quelconque d'une courbe, et UV une droite dans le même plan; on dit que la courbe est *convexe* vers UV au point M lorsqu'à partir de ce point elle commence par s'éloigner plus de UV dans l'un et l'autre sens que ne s'en éloigne la tangente au même point M; on la dit *concave* dans le cas contraire. D'où l'on voit que si des deux côtés de la projection P de M sur UV et entre certaines limites on élevait des perpendiculaires à UV, elles rencontreraient la tangente avant la courbe dans le cas de la convexité, et après, dans le cas de la concavité.

Nous nous bornerons à considérer la concavité ou la convexité des courbes vers l'axe des x; cela sera suffisant pour déterminer le sens dans lequel la courbe s'infléchit, et d'ailleurs la méthode

que nous indiquerons s'étendra facilement à des droites quelconques.

Soit donc $y=\varphi(x)$ l'équation d'une courbe, et x', y' les coordonnées d'un quelconque de ses points; l'équation de la tangente en ce point sera $y-y'=\varphi'(x')\times(x-x')$; faisant $x=x'+h$, on aura pour la tangente $y-y'=\varphi'(x')h$, et pour la courbe

$$y-y'=\varphi(x'+h)-\varphi(x')=\varphi'(x')h+\varphi''(x')\frac{h^2}{1.2}+\text{etc.}$$

L'accroissement de l'ordonnée sera donc plus grand pour la courbe que pour la tangente, quel que soit le signe de h, si l'on a $\varphi''(x')>0$; car on peut toujours supposer h assez petit pour que le terme $\varphi''(x')\frac{h^2}{1.2}$ l'emporte sur tous les suivans. L'inverse aura lieu si l'on a $\varphi''(x')<0$. Si donc l'ordonnée $\varphi(x')$ est positive, les points de la courbe seront plus éloignés de l'axe des x que ceux de la tangente dans le cas où l'on aura $\varphi''(x')>0$, et la courbe sera convexe vers l'axe des x : ils en seront au contraire moins éloignés dans le cas de $\varphi''(x')<0$, et il y aura alors concavité. Mais si l'ordonnée $\varphi(x')$ était négative, les points seraient d'autant plus près de l'axe des x, que les accroissemens de leurs ordonnées seraient plus grands, et alors la concavité correspondrait à $\varphi''(x')>0$, et la convexité à $\varphi''(x')<0$.

Lorsqu'en un point d'une courbe la convexité se change en concavité ou réciproquement, on dit qu'il y a *inflexion*. Or, dans ce cas, il faut que la fonction $\varphi''(x)$ passe du positif au négatif ou réciproquement, et comme ce passage ne peut se faire que par zéro ou l'infini, il faudra que pour le point intermédiaire on ait $\varphi''(x)=0$ ou $\varphi''(x)=\infty$, équations qui détermineront tous les points d'inflexion de la courbe.

Nous avons supposé l'équation de la courbe résolue par rapport à y; mais comme nous avons fait connaître les moyens d'obtenir les dérivées successives d'y par rapport à x, d'après une équation quelconque $F(x,y)=0$, les considérations précédentes pourront être appliquées à toutes les équations.

De la Similitude des Courbes.

107. Nous allons nous proposer de trouver l'équation générale des *courbes semblables* à une courbe donnée. Rien ne sera plus facile ensuite que de reconnaître si deux courbes sont semblables : il suffira de voir s'il est possible de ramener l'équation de l'une d'elles à être comprise dans la formule générale des courbes semblables à l'autre.

Soit donc une équation de courbe $F(x, y) = 0$.

Nous pouvons prendre un point quelconque pour centre de similitude, et nous choisirons pour plus de simplicité l'origine des coordonnées. Soit m le rapport de similitude; désignons par x, y les coordonnées d'un point quelconque de la courbe donnée, et par x', y' celles du point correspondant de la courbe semblable; on aura, à cause de la similitude,

$$\frac{x'}{x} = m \quad \text{et} \quad \frac{y'}{y} = m.$$

Eliminant x et y entre ces deux équations et celle de la courbe $F(x, y) = 0$, on aura l'équation de toutes les courbes semblables à celle-ci, et placées de manière que les lignes homologues soient parallèles et que le centre de similitude soit l'origine. Ces conditions ne restreignant que la position et non la forme des courbes semblables, on est sûr qu'elles se trouveront toutes comprises dans cette formule générale, qui sera

$$F\left(\frac{x'}{m}, \frac{y'}{m}\right) = 0.$$

Appliquons ce résultat à l'ellipse. Rien n'empêche de la supposer rapportée à ses axes, et son équation sera alors.... $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$; celle des courbes semblables sera donc

$$\frac{a^2y'^2}{m^2} + \frac{b^2x'^2}{m^2} = a^2b^2 \quad \text{ou} \quad a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2m^2;$$

ce qui donne une nouvelle ellipse dont les axes sont $2am$, $2bm$; on voit que leur rapport est le même que dans la première, et qu'ils peuvent passer par toutes les grandeurs, à cause de l'indéterminée m. Les courbes semblables à une ellipse donnée sont

donc toutes les ellipses dont le rapport des axes est le même que dans celle-ci.

Soit encore l'équation générale des paraboles $y^m = px^n$. L'équation générale des courbes semblables sera

$$\frac{y^m}{k^m} = p\frac{x^n}{k^n} \quad \text{ou} \quad y = pk^{m-n}x^n.$$

Or le coefficient pk^{m-n} pouvant passer par toutes les valeurs depuis zéro jusqu'à l'infini, on voit que les courbes semblables à la première sont toutes celles dont l'équation est de même forme. D'où il résulte, comme cas particulier, que toutes les paraboles du second degré sont semblables.

Prenons pour dernier exemple l'équation générale des hyperboles $x^m y^n = p$; celle des courbes semblables sera $x^m y^n = pk^{m+n}$, ce qui donne encore toutes les courbes comprises dans la même équation. Mais il ne faut pas croire pour cela que toutes les hyperboles du même degré soient semblables; il se trouve ici une condition de plus, savoir, que les asymptotes sont les axes des coordonnées : d'où il suit que les hyperboles d'un même degré ne sont semblables que lorsque l'angle de leurs asymptotes est le même.

108. Si l'origine n'était pas le centre de similitude et que les courbes eussent leurs lignes homologues parallèles, on pourrait ramener ce cas au précédent en transportant la seconde parallèlement à elle-même. Soient α, β les coordonnées du point qui dans ce mouvement viendra coïncider avec l'origine, la seconde courbe, rapportée à ce point et à des axes parallèles aux premiers, aura une équation de la forme $F\left(\frac{x'}{m}, \frac{y'}{m}\right) = 0$, si la première est $F(x, y) = 0$.

Repassant au premier système, cette équation deviendra

$$F\left(\frac{x-\alpha}{m}, \frac{y-\beta}{m}\right) = 0.$$

Cette formule donne toutes les courbes semblables à la proposée, et dont le point homologue à l'origine a pour coordonnées α et β.

109. Supposons enfin que les courbes ne soient pas placées de manière que les lignes homologues soient parallèles. Soit φ l'angle que fait avec l'axe des x la ligne homologue de la seconde courbe, et α, ζ les coordonnées du point homologue à l'origine; si l'on transporte, pour cette courbe seulement, l'origine au point α, ζ, et qu'on prenne un système d'axes faisant entre eux le même angle que les premiers et inclinés sur eux de l'angle φ, l'équation de la seconde courbe devra encore être $F\left(\frac{x'}{m}, \frac{y'}{m}\right)=0$, si la première est $F(x, y)=0$.

Les équations de transformation seront, en supposant les coordonnées rectangulaires,

$$x=\alpha+x'\cos\varphi-y'\sin\varphi,\quad y=\zeta+x'\sin\varphi+y'\cos\varphi.$$

D'où l'on tire $\begin{cases} x'=(y-\zeta)\sin\varphi+(x-\alpha)\cos\varphi, \\ y'=(y-\zeta)\cos\varphi-(x-\alpha)\sin\varphi; \end{cases}$

reportant ces valeurs dans $F\left(\frac{x'}{m}, \frac{y'}{m}\right)=0$, on aura pour l'équation générale des courbes semblables à la proposée et situées d'une manière quelconque dans un plan

$$F\left\{\frac{(y-\zeta)\sin\varphi+(x-\alpha)\cos\varphi}{m},\ \frac{(y-\zeta)\cos\varphi-(x-\alpha)\sin\varphi}{m}\right\}=0.$$

Nous ne pousserons pas plus loin la recherche des propriétés des courbes. Celles que nous avons fait connaître suffiront pour les discuter d'une manière assez complète. Quant aux surfaces, nous ne pourrions, sans sortir des bornes que nous nous sommes prescrites, en exposer la théorie générale : nous nous contenterons d'en offrir des applications à un assez grand nombre de problèmes, et nous renverrons les élèves aux Traités de MM. Monge, Lagrange et Lacroix.

Nous terminerons ici les considérations générales que nous avons cru devoir présenter avant les applications particulières; nous allons maintenant passer à la seconde partie qui renfermera les problèmes et les exercices qui nous ont paru les plus propres à faire bien concevoir l'esprit des théories.

EXERCICES

SUR

LA SOLUTION DES PROBLÈMES.

110. **Problème.** *On donne trois mélanges composés de trois substances différentes, et on demande ce qu'il faut prendre de chacun pour former un nouveau mélange où ces substances se trouvent dans des rapports donnés.*

Soient a, b, c les nombres qui indiquent combien il y a de fois les quantités connues A, B, C de ces trois substances dans le premier mélange; d, e, f dans le second; g, h, k dans le troisième; et l, m, n ce qu'il doit y avoir de chaque substance dans une quantité du mélange cherché marquée par $l+m+n$. Les quatre mélanges seront représentés par

$$aA+bB+cC,\ dA+eB+fC,\ gA+hB+kC,\ lA+mB+nC.$$

Soient x, y, z les nombres par lesquels il faut multiplier les trois mélanges pour former le quatrième, on aura

$$aAx+bBx+cCx+dAy+eBy+fCy+gAz+hBz \\ +kCz=lA+mB+nC.$$

Egalant les parties des mêmes substances respectives, il vient

$$ax+dy+gz=l,\ \ bx+ey+hz=m,\ \ cx+fy+kz=n.$$

Equations que l'on résoudra d'après les règles connues.

111. **Problème.** *Etant donnés les prix et les proportions de trois mélanges, trouver les prix de chaque substance.*

Soient p, q, r les prix respectifs des mélanges donnés

$$aA+bB+cC,\quad dA+eB+fC,\quad gA+hB+kC;$$

et x, y, z les prix respectifs de A, B, C; on aura les trois équations suivantes :

$$ax+by+cz=p,\quad dx+ey+fz=q,\quad gx+hy+kz=r.$$

112. Problème. *On donne trois prés dont les surfaces respectives sont* b, e, g, *où l'herbe est d'égale hauteur, et croît d'un même mouvement uniforme. Le premier est épuisé par un nombre* a *de bœufs dans le temps* c; *le second par un nombre* d *de bœufs dans le temps* f : *on demande combien le troisième pré pourra nourrir de bœufs pendant le temps* h.

Désignons par m la hauteur primitive de l'herbe, par v la quantité dont elle croît dans l'unité de temps, par v' la quantité d'herbe mangée par chaque bœuf dans la même unité de temps, et par x le nombre de bœufs demandé. On aura les trois équations

$$(m+vc)b=acv',\quad (m+vf)e=dfv',\quad (m+vh)g=xhv'.$$

Pour trouver x au moyen des nombres donnés, il faut éliminer m, v et v'; ce qui peut se faire dans ce cas quoiqu'on n'ait que trois équations, parce que tous les termes contenant l'une de ces trois quantités, leurs rapports seuls sont considérés dans les équations, et il n'y a réellement que deux quantités à faire disparaître, savoir, $\frac{m}{v'}$ et $\frac{v}{v'}$.

Les tirant des deux premières et les reportant dans la troisième, elle donne

$$x=\frac{bcdfg-acefg+acegh-bdfgh}{beh(c-f)}.$$

113. Problème. *Deux mobiles parcourent une même ligne d'un mouvement uniforme; on connaît la distance qui les sépare à un instant connu; leurs vitesses et le sens de leur mouvement, et on demande le temps au bout duquel ils se rencontreront.*

Soient v, v' les vitesses des mobiles, c'est-à-dire les espaces qu'ils parcourent dans l'unité de temps, et d la distance qui les sépare. S'ils vont dans le même sens, on peut considérer celui de derrière comme animé de la différence des deux vitesses, et ayant à parcourir l'espace d. S'ils vont en sens contraire, ils se rapprochent à chaque unité de temps de la somme des vitesses; on peut donc considérer l'un comme animé de la somme des vitesses et ayant à parcourir la distance d. Or l'espace parcouru est égal à la vitesse multipliée par le temps, donc le temps sera $\frac{d}{v-v'}$ ou $\frac{d}{v+v'}$, suivant que le mouvement sera dans le même sens ou en sens contraire.

Mais pour mieux faire ressortir les différentes circonstances que ce problème peut offrir, rapportons les positions à un point fixe A de la ligne droite ou courbe que les mobiles parcourent, et désignons par e, e' leurs distances à l'origine A après le temps t, et par a, a' les mêmes distances pour l'instant que l'on considère comme origine du temps; on aura pour équations du mouvement de chacun d'eux

$$e=a+vt,\quad e'=a'+v't.$$

Si l'on veut maintenant qu'ils soient à une distance donnée m l'un de l'autre, il n'y aura qu'à poser $e-e'=\pm m$, ce qui fera trois équations entre e, e', t. Pour leur rencontre, il faudra faire $m=0$, et l'on tirera comme précédemment $t=\frac{a'-a}{v-v'}$. Des trois équations entre e, e', a, a', t, m, v, v', on peut tirer un grand nombre de problèmes différens, en prenant pour inconnues trois quelconques de ces huit quantités. On devra observer seulement que si le sens d'un des mouvemens était différent de celui que nous avons supposé, l'espace parcouru se retrancherait de a, ce que l'on exprimerait dans le calcul en faisant sa vitesse négative : il en serait de même si l'on considérait un instant antérieur à l'origine supposée au temps, la distance de cet instant à l'origine pourra être considérée comme négative, afin de pouvoir faire usage des formules précédentes où les di-

stances à l'origine des temps croissaient avec l'espace, tandis que dans ce cas l'espace décroît lorsque les distances augmentent. En ayant égard à ces circonstances, le problème n'offrira jamais aucune difficulté, et son énoncé se trouve ainsi généralisé :

Etant données les positions de deux mobiles au même instant ainsi que leurs vitesses et le sens de leur mouvement, trouver leur point de rencontre sur la droite qu'ils parcourent depuis un temps indéfini.

114. Problème. *Trouver les rencontres successives de deux mobiles sur une courbe fermée.*

Ce problème revient au précédent, en observant que lorsque les mobiles sont au même point, la rencontre suivante aura lieu quand celui qui a la plus grande vitesse aura gagné sur l'autre toute l'étendue de la courbe qu'ils parcourent. En appelant c cette longueur, la troisième équation $e - e' = \pm m$ deviendra $e - e' = \pm nc$ pour la rencontre du rang $(n+1)$ soit après, soit avant le moment pris pour origine des temps.

115. Problème. *On propose de déterminer à chaque instant la position d'un mobile dont la vitesse change d'une manière continue et proportionnellement au temps.*

Dans le mouvement varié, on nomme *vitesse* à un instant quelconque celle avec laquelle le point se mouverait si les causes qui agissent sur lui cessaient subitement et laissaient le mouvement uniforme. Cela posé, soit t le temps pendant lequel le point s'est mu, et v la vitesse qu'il a acquise; elle sera facilement connue, puisqu'on sait qu'elle est proportionnelle au temps et que l'on est supposé connaître sa valeur à un instant donné, par exemple après l'unité de temps; il ne reste donc qu'à déterminer l'espace parcouru en fonction de v et t.

Pour cela, partageons t en un nombre quelconque n d'intervalles égaux; la vitesse devant croître aussi de quantités égales, sera à la fin de chacun d'eux $\frac{v}{n}, \frac{2v}{n}, \frac{3v}{n}, \ldots\ldots, v$.

Or si l'on suppose que pendant le premier intervalle la vitesse soit constante et égale à $\frac{v}{n}$, pour le second à $\frac{2v}{n}$, et ainsi de suite

jusqu'à v, la somme des espaces sera trop grande, tandis qu'elle serait trop petite si le premier intervalle de temps était parcouru avec une vitesse nulle, le second avec la vitesse $\frac{v}{n}$, et ainsi de suite jusqu'à $\frac{(n-1)v}{n}$; l'espace cherché est donc compris entre ces deux sommes.

Les espaces partiels de la première seront

$$\frac{v}{n}\cdot\frac{t}{n}+\frac{2v}{n}\cdot\frac{t}{n}+\frac{3v}{n}\cdot\frac{t}{n}\ldots+v\cdot\frac{t}{n},$$

et formeront une progression par différence, dont la somme sera

$$\frac{t}{n}\left(v+\frac{v}{n}\right)\frac{n}{2} \quad \text{ou} \quad \tfrac{1}{2}\,t\left(v+\frac{v}{n}\right).$$

La seconde somme sera de même

$$\frac{t}{n}\cdot\frac{(n-1)v}{n}\cdot\frac{n}{2}, \quad \text{ou} \quad \frac{t}{2}\cdot\frac{(n-1)v}{n}, \quad \text{ou} \quad \tfrac{1}{2}\,t\left(v-\frac{v}{n}\right).$$

Or la différence de ces deux sommes est $\frac{vt}{n}$, et devient de plus en plus petite à mesure que l'on fait croître n. Mais alors la vitesse s'approche de plus en plus de varier d'une manière continue, et en même temps l'espace tend indéfiniment vers $\frac{1}{2}\,vt$, qui est la limite des deux sommes entre lesquelles il est compris; donc d'après le théorème des limites, l'espace parcouru par le mobile d'un mouvement continu sera $\frac{1}{2}\,vt$. Désignant cet espace par e, on aura donc $e=\frac{1}{2}\,vt$.

Si l'on appelle g la vitesse acquise après l'unité de temps, on aura par l'hypothèse $v=gt$; d'où $e=\frac{1}{2}gt^2$ et $v^2=2ge$.

La nature offre une application simple de ce mouvement dans la chute des corps (dans le vide) par l'action de la pesanteur; car recevant à chaque instant une impulsion égale dans le sens de la verticale, leur vitesse doit croître uniformément, c'est-à-dire dans le même rapport que le temps.

Corollaire. Si le mobile s'était mu pendant le même temps t

avec la vitesse finale v, il aurait parcouru un espace double, car d'après la théorie du mouvement uniforme cet espace serait vt.

116. PROBLÈME. *Trouver la vitesse qu'il faut imprimer à un corps, pour le faire parvenir verticalement à une hauteur* h *avec une vitesse* a.

On remarquera pour cela que pendant qu'il remonte la pesanteur diminue autant sa vitesse qu'elle l'augmenterait s'il descendait. Si donc on désigne par v la vitesse demandée, elle sera précisément celle que le corps acquerrait s'il tombait de la hauteur h partant avec la vitesse initiale a. La vitesse gagnée $v-a$ sera donc, d'après les formules précédentes,

$$v-a=\sqrt{2gh},\quad \text{d'où}\quad v=a+\sqrt{2gh}.$$

COROLLAIRE. Si on lance verticalement de bas en haut un corps avec la vitesse a, et qu'au moment où elle sera éteinte on lui imprime la vitesse b, il montera moins haut que si on lui imprimait d'abord la vitesse $a+b$. Car l'espace dans ce dernier cas sera $\frac{(a+b)^2}{2g}$, et dans le premier il ne serait que $\frac{a^2}{2g}+\frac{b^2}{2g}$. Ces deux espaces seront bien parcourus dans le même temps, mais la vitesse initiale est plus grande dans un cas, jusqu'au point où elle se réduit à b comme la seconde.

117. PROBLÈME. *Trouver la vitesse que la pesanteur a communiquée à un corps tombant librement pendant une seconde.*

Supposons pour cela qu'on ait pris la seconde pour unité de temps et qu'on ait laissé tomber d'une hauteur connue h un corps que l'on aura choisi très dense pour diminuer l'effet de la résistance de l'air; soit t le nombre de secondes que le mouvement a duré, on aura, en faisant abstraction de la résistance de l'air,

$$h=g\frac{t^2}{2},\quad \text{d'où}\quad g=\frac{2h}{t^2}.$$

Substituant à h et t leurs valeurs connues, on trouvera g exprimé en unités de longueur; cette valeur pour la latitude de Paris est $g=9^m,8088$.

On a reconnu que cette vitesse variait avec la latitude : si l'on désigne par m celle qui a lieu pour la latitude de 50° et par m' celle pour la latitude ϕ, on a $m' = m(1 - 0,002837 . \cos 2\phi)$. Au pôle on a $\phi = \frac{1}{2}\pi$ et $m' = m(1 + 0,002837)$; à l'équateur $\phi = 0$ et $m' = m(1 - 0,002837)$; l'accroissement de pesanteur de l'équateur au pôle est donc $2m(0,002837)$, ce qui fait à peu près $\frac{1}{176}$ de sa valeur moyenne.

118. Problème. *Trouver les diverses rencontres sur une courbe fermée de deux mobiles dont la vitesse croît proportionnellement au temps.*

Pour le premier mobile, on aura en désignant par e sa distance à l'origine après le temps t, par a cette distance pour le temps zéro, et par g la vitesse acquise après l'unité de temps,

$$e = a + \tfrac{1}{2}gt^2.$$

Pour le second mobile, on aura

$$e' = a' + \tfrac{1}{2}g't^2,$$

et pour la rencontre de l'ordre n, on aura $e' - e = (n-1)c$, en désignant par c le contour de la courbe; d'où l'on tirera

$$a' - a + \frac{(g'-g)t^2}{2} = (n-1)c, \text{ et } t = \sqrt{\frac{2(n-1)c + 2(a-a')}{g'-g}}.$$

119. Problème. *Connaissant la pesanteur spécifique de deux corps, trouver dans quel rapport ils entrent dans un mélange donné.*

Nous commencerons par donner une idée rapide de ce que c'est que la pesanteur spécifique et des moyens de la déterminer.

On appelle pesanteur spécifique d'un corps, le poids d'une unité de son volume; on la rapporte ordinairement à celle de l'eau, et alors il suffit de diviser le poids d'un volume quelconque du corps par celui d'un pareil volume d'eau : ce dernier poids se détermine au moyen de ce principe, qu'*un corps plongé dans un liquide y perd une quantité de son poids égale à celui du volume de liquide déplacé.* Et en effet, le corps remplace alors un volume égal de liquide qui, étant en équilibre, devait être

poussé de bas en haut par une force verticale égale à son poids ; le corps plongé doit donc perdre une quantité égale du sien. Par conséquent, pour trouver la pesanteur spécifique d'un corps quelconque, on le pèsera dans le vide, puis dans l'eau, et on divisera le premier poids par la perte qu'il aura subie.

Si l'on veut déduire le poids d'un corps de sa pesanteur spécifique, on la multipliera par le volume, l'unité étant toujours le poids de l'unité de volume d'eau.

Si l'on veut déduire au contraire le volume, du poids, on divisera ce dernier par la pesanteur spécifique.

Cela posé, soient p, p' les pesanteurs spécifiques des deux substances, et p'' celle du mélange donné que l'on déterminera comme il vient d'être dit, ainsi que son volume m. Soient x et y les volumes des deux substances; on aura

$$x+y=m, \quad px+p'y=p''m;$$

d'où $$x=\frac{p''-p'}{p-p'}\times m, \quad y=\frac{p-p''}{p-p'}\times m.$$

Enoncés de Problèmes du premier degré.

Problème. Une personne possède a francs qu'elle fait valoir à un certain intérêt, et elle doit b francs dont elle paie un autre intérêt; l'intérêt de la première somme surpasse de c celui de la seconde. Une autre personne fait valoir d francs au second intérêt, et paie l'intérêt de e francs au premier taux; elle retire f francs de plus qu'elle ne paie. On demande les taux des deux intérêts.

Problème. Une personne achète un certain nombre d'aunes d'étoffe à un prix qu'on ignore. Si elle achetait cinq aunes de plus d'une étoffe qui coûte 3 francs de moins, elle paierait le même prix ; mais si elle achetait six aunes de plus d'une étoffe qui coûte 4 francs de moins, elle paierait 18 francs de moins. Il s'agit de trouver les nombres d'aunes et les prix de chaque espèce d'étoffe.

Problème. On demande les biens de trois personnes A, B, C,

sachant que le bien de A augmenté de m fois la somme des biens de B et C, vaut p; que le bien de B plus n fois la somme de ceux de A et C, vaut q; enfin que le bien de C, joint à l fois ceux de A et B, vaut r.

Problème. Partager les nombres donnés a, b, c, d, e... chacun en deux parties telles que le rapport d'une partie de a à une de b, de l'autre de b à une de c, de l'autre de c à une de d, de la seconde de d à une de e, etc. jusqu'au rapport de la seconde partie du dernier nombre à la seconde de a, soient tous donnés.

Problème. Trouver les biens de six personnes, A, B, C, D, E, F, sachant que la somme des biens de A et B est a; que celle des biens de C et D est b; que celle de E et F est c; que le bien de A vaut m fois celui de C; le bien de D, n fois celui de E, et le bien de F, p fois celui de B.

Problème. Trouver les huit quantités A, B, C, D, E, F, G, H, connaissant les sommes ou les différences deux à deux, de A et B, de C et D, de E et F, de G et H; et les rapports de A à C, de D à E, de F à G, et de H à B.

Généralement, les quantités A, B, C... étant en nombre pair $2m$, il y aura un cas d'impossibilité ou d'indétermination lorsque m sera pair, et le problème sera toujours possible et déterminé lorsque m sera impair.

Problème. Trouver les arêtes d'un parallélépipède rectangle, sachant qu'elles sont entre elles comme les nombres m, n, p, et que si ces arêtes varient des quantités respectives, a, b, c, la surface totale aura varié d'une quantité q.

Problèmes indéterminés du premier degré.

Problème. Trouver des multiples des deux nombres 54 et 73 qui diffèrent entre eux d'un nombre donné r.

Problème. Le mois lunaire étant de $29^j\ 12^h\ 44'$, et par suite sa longueur étant à celle du jour solaire comme les nombres 10631 et 360, on demande les multiples de ces deux nombres qui différeront de r.

Problème. Trouver les nombres qui, divisés par 3, 5, 7 donnent les restes respectifs 2, 4, 6.

Problème. Payer une somme de 3457 francs en pièces de 5 francs et de 24 francs.

Problème. La piastre valant 5 francs 8 sous, et l'écu de France valant 2 francs 15 sous, on propose de payer 1000 francs en piastres et en écus seulement.

Problème. On a trois lingots d'argent de trois *titres* différens. Le premier est au titre de 11 deniers; le second de $10\frac{1}{2}$, et le troisième de 9; combien doit-on prendre d'onces de chaque lingot pour en faire un lingot de 30 onces dont le titre soit à 10 deniers?

Problème. Trouver en nombres entiers les côtés d'un rectangle tel que sa surface contienne quatre fois autant de mètres carrés que son contour contient de mètres.

Solution. Soient x et y les deux côtés, on aura $xy = 8(x+y)$;

d'où
$$x = \frac{8y}{y-8} = 8 + \frac{64}{y-8}.$$

Il faudra donc que $y-8$ soit diviseur de 64; égalant successivement $y-8$ à chacun des diviseurs de 64 (tant positifs que négatifs), et cherchant les valeurs positives correspondantes d'x, on obtiendra toutes les solutions entières de l'équation.

Si l'on avait l'équation générale $xy = m(x+y)$, on trouverait $x = m + \dfrac{m^2}{y-m}$, et l'on traiterait les diviseurs de m^2 comme on a fait pour ceux de 64.

Problème. Trouver en nombres entiers les arêtes de parallélépipèdes rectangles à base carrée, tels que leur volume vaille cinq fois autant de mètres cubes que leur surface contient de mètres carrés.

Ce problème se résout comme le précédent.

Problème. Soit a le côté d'un carré donné en nombre entier, on demande en nombres entiers les côtés x, y d'un rectangle, de manière que les deux figures aient leurs surfaces proportionnelles à leurs contours.

Le calcul conduit à égaler $2y-a$ aux différens diviseurs de a^2, et on ne devra prendre parmi ces diviseurs que ceux qui augmentés de a donneront des nombres pairs.

Problème. Trouver quels sont les polygones réguliers d'une même espèce ou d'espèces différentes au moyen desquels on puisse couvrir exactement un plan indéfini.

Enoncés de Problèmes du second degré.

Problème. Trouver trois nombres, connaissant chacun des quotiens qu'on obtient en divisant chacun des produits de deux d'entre eux par le troisième.

Problème. Trouver trois nombres, connaissant le produit de chacun d'eux par la somme des deux autres.

Problème. Trouver trois nombres, connaissant le produit de chacun d'eux par la différence des deux autres.

Ce problème est indéterminé ou impossible. On le résoudra ainsi que le précédent en déterminant d'abord les trois produits xz, xy, yz, puis en en déduisant les trois carrés x^2, y^2, z^2.

Problème. Trouver deux nombres dont on connaît la somme $2s$ et la somme des cubes $2q$.

On prendra pour inconnue la différence $2d$ des deux nombres, qui seront alors exprimés par $s+d$ et $s-d$.

Problème. Un négociant a un certain nombre d'aunes de drap, et 90 aunes de plus d'un drap moins fin; les valeurs totales des prix des aunes de chaque espèce sont égales. S'il vendait chaque espèce au prix de l'autre, il retirerait pour les premières 900 fr., et pour les secondes 2500 fr. Trouver les deux nombres d'aunes.

Problème. Trouver deux nombres dont on connaît la somme ou la différence $2m$, et la somme ou la différence $\frac{p}{q}$ des quotiens qu'on obtient en les divisant mutuellement l'un par l'autre.

Problème. Deux courriers partent au même instant, l'un de A pour aller en B, l'autre de B pour aller en A; leurs vitesses sont uniformes et dans un rapport tel, que le premier arrive en B quatre heures après qu'ils se sont rencontrés, et que le

second arrive en A neuf heures après cette rencontre. On demande le temps employé par chacun pour parcourir la distance AB.

Problème. Un négociant escompte deux billets, l'un de 8776 fr. payable dans neuf mois, l'autre de 7488 fr. payable dans huit mois : il a payé pour le premier 1200 fr. de plus que pour le second : on demande le taux de l'intérêt.

Problème. Un négociant a acheté un certain nombre d'aunes d'étoffe pour 1728 fr. ; il en prend 24 pour son usage, et il vend le reste pour 1800 fr., de manière qu'il gagne 3 fr. par aune : on demande le nombre des aunes.

Problème. Une personne qui possède 100000 fr. partage cette somme en deux parties, qu'elle fait valoir à deux taux différens et pour lesquelles elle retire en tout 5400 fr. d'intérêt. Si elle faisait valoir la première partie au même taux que la seconde, elle en retirerait 3600 fr. d'intérêt ; et si elle faisait valoir la seconde au même taux que la première, elle en retirerait 2000 fr. On demande les deux taux et les deux parties de la somme proposée 100000 fr.

Problème. En vendant un cheval 11 louis, on a gagné pour cent autant que le cheval avait coûté : on demande quel était ce prix.

Problème. Trouver quatre nombres en proportion par quotient, connaissant la somme $2a$ des moyens, la somme $2b$ des extrêmes, et la somme $4c$ des carrés des quatre termes.

On prendra pour inconnue auxiliaire le produit p des moyens ou des extrêmes. On trouvera ainsi que la demi-différence des moyens est $\sqrt{a^2-p}$, que la demi-différence des extrêmes est $\sqrt{b^2-p}$; d'où l'on conclura l'expression des quatre termes en fonction de p ; on égalera la somme de leurs carrés à $4c$, ce qui donnera $p=a^2+b^2-c$, et les quatre termes seront connus.

Questions qui conduisent à des équations qui se ramènent à celles du second degré.

Problème. Trouver deux nombres dont on connaît le produit, et la somme ou la différence de leurs carrés.

Problème. Trouver deux nombres dont on connaît la somme $2s$, et la somme ou la différence $2q$ de leurs quatrièmes puissances. On appellera $2x$ la différence des deux nombres; alors ils seront exprimés respectivement par $s+x$, $s-x$, et le calcul n'offrira aucune difficulté.

Problème. Trouver quatre nombres en proportion par quotient, connaissant la somme des moyens, celle des extrêmes, et celle des quatrièmes puissances des quatre termes.

On prendra pour inconnue la différence $2x$ des moyens.

Problème. Trouver quatre nombres en proportion par quotient, connaissant la somme des extrêmes, celle des moyens, et l'excès de la somme des cinquièmes puissances des extrêmes sur la somme des cinquièmes puissances des moyens.

Problème. Trouver quatre nombres en proportion par quotient, connaissant leur somme, celle de leurs carrés et celle de leurs quatrièmes puissances.

Problème. Trouver quatre nombres en proportion, connaissant la somme des quatre termes, celle de leurs cubes, et celle de leurs cinquièmes puissances.

Problème. Trouver deux nombres dont on connaît la somme p de leur produit et du produit de leur somme par un nombre donné a, et dont on connaît aussi la somme $2q$ de la somme de leurs carrés et du produit de leur somme par un nombre donné $2b$.

On prendra pour inconnue la somme $2x$ des deux nombres et leur différence $2y$, les deux équations seront alors

$$x^2-y^2+2ax=p, \quad x^2+y^2+2bx=q;$$

d'où l'on tirera par l'addition et la soustraction de ces deux

équations,

$$2x^2 + 2(a+b)x = p + q, \quad 2y^2 + 2(b-a)x = q - p,$$

équations qui n'offriront aucune difficulté.

120. On peut voir par plusieurs des exemples précédens, combien le choix des inconnues peut simplifier les équations. Le dernier problème, par exemple, aurait conduit à une équation complète du quatrième degré, si l'on avait pris pour inconnues les deux nombres demandés. Il faut autant que possible choisir des inconnues qui entrent d'une manière symétrique ou avec une simple différence de signe dans l'expression des nombres entre lesquels on donne des relations. Il en résulte alors, ou des similitudes qui abrégent les calculs en les ramenant les uns aux autres, ou des destructions de termes qui les simplifient considérablement. C'est ainsi que dans un grand nombre des problèmes précédens nous avons pris pour inconnues la somme, la différence ou le produit des nombres cherchés; et l'on sentira tout l'avantage de ce choix, si l'on résout les mêmes problèmes en prenant immédiatement les nombres cherchés pour inconnues.

Il arrive quelquefois que certaines quantités dépendantes des inconnues sont susceptibles d'un moindre nombre de valeurs que celles-ci; et si on les prend pour inconnues, on sera conduit à des équations de degré moins élevé. C'est en ayant égard à toutes ces considérations, qu'on peut parvenir à donner de l'élégance et de la simplicité aux formules, et même à résoudre des problèmes qui, sans cela, seraient au-dessus des forces de l'analyse actuelle.

Problèmes sur les coefficiens indéterminés.

121. Problème. *Trouver les diviseurs d'un degré donné d'un polynome*

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + V.$$

Si l'on désigne par n le degré des diviseurs, leur forme générale sera

$$x^n + \alpha x^{n-1} + 6x^{n-2} + \ldots + \mu.$$

Le quotient du polynome donné par ce diviseur sera de la forme

$$x^{m-n} + ax^{m-n-1} + bx^{m-n-2} \ldots + u.$$

Faisant le produit du diviseur par le quotient et l'égalant au dividende, on aura m équations entre les m inconnues $\alpha, \beta, \ldots \mu$, et $a, b \ldots u$, d'où l'on déduira à la fois les coefficiens des diviseurs du degré n et du degré $m-n$.

122. Problème. *Eliminer une inconnue entre deux équations d'un degré quelconque.*

Soient les deux équations, ordonnées par rapport à x,

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \ldots + V = 0,$$
$$x^n + P'x^{n-1} + Q'x^{n-2} + \ldots + V' = 0,$$

dans lesquelles les coefficiens P, Q, ..., V, P', Q', ..., V', de x, peuvent renfermer d'autres inconnues.

Toute valeur d'y qui convient à ces équations doit introduire une racine commune en x par sa substitution; les équations résultantes doivent donc avoir un commun diviseur $x-\alpha$; on aura donc

$$x^m + \ldots + V = (x-\alpha)(x^{m-1} + ax^{m-2} + \ldots + v),$$
$$x^n + \ldots + V' = (x-\alpha)(x^{n-1} + a'x^{n-2} + \ldots + v').$$

Eliminant $x-\alpha$, il vient

$$(x^m .. + V)(x^{n-1} + a'x^{n-2} .. + v') = (x^n + .. + V')(x^{m-1} .. + v)$$

Cette identité fournira $m+n-1$ équations entre lesquelles on éliminera les $m+n-2$ coefficiens $a \ldots v$, $a' \ldots v'$ qui n'entreront qu'au premier degré, et il restera une équation de condition en y qui exprimera que les premiers membres ont un diviseur commun du premier degré : les valeurs d'y que l'on en tirera seront donc celles qui conviendront au système des deux équations, conjointement avec les valeurs d'x que donneront les diviseurs correspondans égalés à zéro.

La formule de ces diviseurs sera

$$\frac{x^{m-1} + ax^{m-2} + \ldots + v}{x^m + \ldots + V} = Kx + H;$$

d'où l'on voit que si à une valeur d'y correspondaient plu-

sieurs valeurs d'x, on aurait nécessairement $K=0$, $H=0$, sans quoi l'équation $Kx+H=0$ ne pourrait être satisfaite par deux valeurs de x. La forme $\frac{0}{0}$ trouvée pour x annoncera donc que le diviseur commun en x est d'un degré supérieur au premier, et on le cherchera par la méthode connue.

123. Problème. *Connaissant les facteurs du premier degré du dénominateur d'une fraction rationnelle, la décomposer en autant de fractions ayant des numérateurs indépendans d'x, et pour dénominateurs respectifs ces facteurs du premier degré.* Soit la fraction

$$\frac{ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots+u}{x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}\ldots+V}=\frac{M}{N}.$$

Soient, α, β, ... μ, les seconds termes des facteurs du dénominateur pris en signe contraire et supposés tous inégaux, et P, Q, ..., S, les numérateurs des fractions partielles; la proposée devra être égale à

$$\frac{P}{x-\alpha}+\frac{Q}{x-\beta}\cdots+\frac{S}{x-\mu}.$$

Chassant les dénominateurs et identifiant, il viendra

$$M=\frac{PN}{x-\alpha}+\frac{QN}{x-\beta}+\ldots+\frac{SN}{x-\mu},$$

où l'on remarque que chaque terme est divisible par son dénominateur et ne le contient plus après la division, et que tous les autres ont ce même dénominateur pour facteur. On pourrait, comme précédemment, tirer P, Q.., en identifiant les coefficiens des mêmes puissances de x, mais on observera que cette identité ayant lieu quel que soit x, ne sera pas détruite si l'on fait $x=\alpha$; ce qui ne laisse subsister que le premier terme du second membre, et donne pour valeur de P l'expression $\frac{M}{\left(\frac{N}{x-\alpha}\right)}$ dans laquelle on fait $x=\alpha$ après la division par $x-\alpha$.

Pour avoir Q, on fera de même $x=\beta$; et ainsi des autres,

et l'on aura pour P, Q,... des valeurs finies et indépendantes de x.

Cette décomposition n'est plus possible lorsque le dénominateur a des facteurs égaux; car si, par exemple, on avait $\alpha = \mathcal{C}$, quand on ferait $x = \alpha$, l'équation (1) ne serait plus identique, puisque le second membre seul deviendrait nul; mais on peut toujours déterminer par le même moyen les fractions partielles qui correspondent aux facteurs inégaux, en y ajoutant une fraction de la forme $\frac{R}{(x-r)^p}$, $x-r$ étant un facteur du degré p de N, et R un polynome du degré $(p-1)$ en x, qu'on obtiendra facilement d'après les fractions connues et la proposée. Or on peut opérer la décomposition suivante :

$$\frac{R}{(x-r)^p} = \frac{A'}{(x-r)^p} + \frac{B'}{(x-r)^{p-1}} \cdots + \frac{S'}{x-r}.$$

A', B', ..., S', étant indépendans de x, il suffira de chasser le dénominateur $(x-r)^p$ et d'identifier les deux membres, ce qui fournira autant d'équations que de coefficiens, A'... S'. Cette identité sera

$$R = A' + B'(x-r) + C'(x-r)^2 \ldots + S'(x-r)^{p-1}.$$

Mais on peut encore déterminer A', ..., S', plus simplement de la manière suivante. On fera d'abord $x = r$, et on aura A' et l'équation suivante :

$$\frac{R - A'}{x-r} = B' + C(x-r) \ldots + S'(x-r)^{p-2}.$$

Faisant encore $x = r$, on aura B'; et l'on continuera ainsi jusqu'à S'.

On agira de la même manière lorsqu'il y aura d'autres facteurs multiples que $(x-r)$.

41. Remarque. Toute fraction rationnelle pouvant être décomposée en fractions simples de la forme $\frac{A}{x-a}$, lorsque son

dénominateur n'a pas de facteurs égaux, et le développement de cette dernière donnant la progression géométrique indéfinie

$$-\frac{A}{a}\left(1+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}+\frac{x^3}{a^3}+\text{etc.}\right),$$

il s'ensuit que le développement de toute fraction rationnelle, ou, en d'autres termes, qu'une série récurrente quelconque est la somme d'un nombre de progressions par quotient marqué par le degré du dénominateur. Le terme général du développement s'obtiendra facilement en faisant la somme des termes généraux d'un même degré de toutes ces progressions.

Réciproquement. Si l'on ajoute terme à terme plusieurs progressions géométriques, on aura toujours une série récurrente, car toute progression peut être le développement d'une fraction $\frac{A}{x-a}$, x étant donné et A, a déterminés par la progression proposée.

124. Problème. *Trouver les conditions générales pour qu'un polynome du second degré à deux variables soit décomposable en deux facteurs rationnels du premier degré.* Soit le polynome

$$y^2+axy+bx^2+cy+dx+e.$$

Ses deux facteurs du premier degré seront de la forme

$$y-mx-n \quad \text{et} \quad y-m'x-n'.$$

Leur produit sera

$$y^2-(m+m')xy+mm'x^2-(n+n')y+(mn'+nm')x+nn'.$$

L'identifiant avec le polynome proposé, on aura les 5 équations

$$m+m'=-a,\ mm'=b,\ n+n'=-c,\ mn'+nm'=d,\ nn'=e.$$

Eliminant m, m', n, n', on obtiendra l'équation de condition

$$(ac-2d)^2=(a^2-4b)(c^2-4e);$$

ou bien $$d^2-acd=4be-a^2e-bc^2.$$

Si l'on demandait que le polynome fût un carré parfait, il faudrait que l'on eût $m'=m$ et $n'=n$; les équations précédentes deviendraient

$$2m=-a,\quad m^2=b,\quad 2n=-c,\quad 2mn=d,\quad n^2=e.$$

Eliminant m et n, on aurait les trois conditions

$$ac=2d,\quad a^2=4b,\quad c^2=4e.$$

125. Problème. *Trouver le développement de la puissance* m *entière d'un binome* x + a.

$(x+a)^m$ n'étant autre chose que x^m dans lequel on change x en $x+a$, les deux premiers termes seront, d'après la théorie des dérivées $x^m+mx^{m-1}a$. Dans tous les autres termes, la somme des exposans d'x et d'a sera m, d'après les règles de la multiplication, et on pourra représenter le développement par

$$(x+a)^m=x^m+mx^{m-1}a+Ax^{m-2}a^2+Bx^{m-3}a^3+Cx^{m-4}a^4+\text{etc.}$$

Or, soit qu'on augmente x ou a de h, on a le même résultat $(x+a+h)^m$; donc, le coefficient de h à la première puissance, est le même dans les deux cas. Prenant donc la dérivée du second membre, d'abord par rapport à x, puis par rapport à a, on aura deux expressions qui devront être identiques, et qui seront

$$mx^{m-1}+m(m-1)x^{m-2}a+A(m-2)x^{m-3}a^2+\text{etc.},$$
$$mx^{m-1}+2Ax^{m-2}a+3Bx^{m-3}a^2+\text{etc.}$$

Identifiant, on aura

$$m(m-1)=2A,\ A(m-2)=3B,\ B(m-3)=4C,\ \text{etc.};$$

d'où $A=\dfrac{m(m-1)}{2}$, $B=\dfrac{m(m-1)(m-2)}{2\,.\,3}$, etc.,

ce qui donne une loi facile à saisir pour les coefficiens du développement.

126. Problème. *Trouver le même développement en supposant* m *quelconque.*

Tout se réduit à faire voir qu'on peut toujours supposer au développement, la forme

$$x^m + mx^{m-1}a + Ax^{m-2}a^2 + \text{etc.}$$

Pour cela, posons $\frac{a}{x} = z$, on aura $(x+a)^m = x^m(1+z)^m$.

Si m est une fraction $\frac{p}{q}$, on aura à extraire la racine q de $(1+z)^p$, ce qui donnera un développement procédant suivant les puissances entières et positives de z. Si m est négatif, il faudra diviser l'unité par un développement procédant de cette même manière, ce qui donnera un quotient du même genre. On aura donc, dans ces deux cas,

$$(1+z)^m = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \text{etc.}$$

Remplaçant z par $\frac{a}{x}$, et multipliant par x^m, il vient

$$(x+a)^m = x^m + Ax^{m-1}a + Bx^{m-2}a^2 + \text{etc.}$$

Or, on sait que dans tous ces cas, la dérivée de x^m est mx^{m-1}; on a donc

$$(x+a)^m = x^m + mx^{m-1}a + Bx^{m-2}a^2 + \text{etc.};$$

d'où l'on déduira les mêmes valeurs de B, C, etc., que dans le cas précédent. Seulement, quand m ne sera pas entier et positif, le développement sera indéfini, même pour des valeurs particulières de m, parce que ces coefficiens ne deviendront jamais nuls.

127. Problème. *Trouver le développement suivant les puissances ascendantes de* x *de la fraction* $\frac{\alpha + 6x}{1 - ax - bx^2}$.

En effectuant la division et ordonnant par rapport aux puissances ascendantes de x, on sait que le quotient procédera suivant les puissances entières et positives d'x; de sorte que l'on pourra établir l'identité

$$\frac{\alpha + 6x}{1 - ax - bx^2} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}$$

Chassant les dénominateurs, il vient

$$\begin{array}{l|l|l|l|l} \alpha+\mathcal{C}x = A + B & x + C & x^2 + D & x^3 + E & x^4 + \ldots \\ \quad\quad - Aa & - Ba & - Ca & - Da & \\ & - Ab & - Bb & - Cb & \end{array}$$

Égalant les coefficiens des mêmes puissances d'x, on aura les équations

$A=\alpha$, $B-Aa=\mathcal{C}$, $C-Ba-Ab=o$, $D-Ca-Bb=o$, etc.;

d'où l'on tire $A=\alpha$, $B=a\alpha+\mathcal{C}$, $C=Ba+Ab$, $D=Ca+Bb$, etc.

De sorte qu'à partir du troisième terme, chaque coefficient est égal à la somme des deux précédens multipliés respectivement par les constantes a et b. Chaque terme se déduit alors des deux précédens en multipliant l'un par ax et l'autre par bx^2. Une pareille série se nomme *récurrente*, et les constantes par lesquelles on multiplie les termes, forment ce qu'on appelle l'*échelle de relation.*

On obtiendrait des résultats analogues, en supposant les deux termes de la fraction d'un degré quelconque.

128. Problème. *Etant donnée une équation, en trouver une autre dont la première ait pour racines les carrés des différences entre les racines de la seconde.*

Soit l'équation donnée

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots + v = o.$$

Désignons par m le degré de l'équation cherchée, on aura la relation connue $\frac{m(m-1)}{2} = n$;

d'où $m^2 - m - 2n = o$, et $m = \frac{1 \pm \sqrt{1+8n}}{2}$.

On ne pourra prendre que le signe $+$ du radical, parce que m doit être positif, et comme il doit de plus être rationnel et entier, il faudra que $1+8n$ soit un carré; ce carré étant im-

pair, le numérateur $1+\sqrt{1+8n}$ sera pair, et par suite m sera entier.

Cela posé, représentons l'équation cherchée par

$$x^m+\alpha x^{m-1}+\beta x^{m-2}+\ldots+\mu=0.$$

En cherchant par les moyens connus son équation aux carrés des différences, on obtiendra une équation du degré n qui devra être identique avec la proposée. On aura par là n équations entre les m coefficiens de l'équation cherchée. Or si n est plus grand que 3, il sera plus grand que m, puisqu'il est égal à $\frac{m(m-1)}{2}$, et l'on aura plus d'équations que d'inconnues; il y aura donc $n-m$ équations de condition entre les coefficiens donnés qui se joindront avec la condition que $1+8n$ soit un carré.

129. Nous allons chercher à développer les fonctions a^x, $\log(1+x)$, $\sin x$ et $\cos x$, suivant les puissances entières positives et croissantes de la variable x.

Problème. Pour *développer* a^x, on observera d'abord que a^x se réduisant à l'unité quand on fait $x=0$, le terme indépendant d'x dans le développement doit être 1, et les autres ne doivent renfermer aucune puissance négative de x, sans quoi cette hypothèse les rendrait infinis. De plus, il ne saurait y avoir d'exposans fractionnaires, car alors le développement aurait plusieurs valeurs correspondantes à une seule valeur d'x, ce qui ne peut avoir lieu pour la fonction a^x; ce développement sera donc de la forme

$$a^x=1+Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+\text{etc.}\ldots$$

Or, si l'on y échange x en $x+h$, on a le même résultat qu'en multipliant a^x par a^h, c'est-à-dire $1+Ax+Bx^2+$ etc. par $1+Ah+Bh^2+$ etc.

Prenant dans les deux cas le coefficient total de la première puissance d'h, on aura, en les identifiant,

$$A+2Bx+3Cx^2+\text{etc.}=A+A^2x+ABx^2+\text{etc.};$$

d'où l'on tire

$$2B = A^2, \quad 3C = AB, \quad 4D = AC, \text{ etc.},$$

et enfin

$$B = \frac{A^2}{2}, \quad C = \frac{A^3}{2.3}, \quad D = \frac{A^4}{2.3.4}, \text{ etc.}$$

Le développement de a^x devient

$$a^x = 1 + Ax + \frac{A^2x^2}{1.2} + \frac{A^3x^3}{1.2.3} + \frac{A^4x^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

Il ne reste plus qu'à trouver la valeur de A. Ce développement ayant lieu quel que soit x, posons $Ax = 1$, il devient

$$(1)\ldots\ a^{\frac{1}{A}} = 2 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \text{etc.} = e.$$

Les termes de cette série diminuant rapidement, si l'on calcule la somme des dix premiers termes, on trouvera...... $e = 2{,}7182818$ etc. à moins de $0{,}00000002$ etc. près.

De l'équation $a^{\frac{1}{A}} = e$, on tire en prenant les logarithmes dans un système quelconque,

$$\frac{1}{A}\log a = \log e, \quad \text{d'où } A = \frac{\log a}{\log e}.$$

Si l'on désigne par l' les logarithmes pris dans la base e (ces logarithmes ont reçu le nom de logarithmes *népériens*), on aura $A = l'a$, et par suite

$$(2)\ldots a^x = 1 + xl'a + \frac{(xl'a)^2}{1.2} + \frac{(xl'a)^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

Faisant $a = e$, on trouve

$$(3)\ldots e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

130. *La valeur de* e *est incommensurable ; mais on peut en approcher autant qu'on veut.* En effet

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\text{etc.}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2.2}+\frac{1}{2.2.2}+\text{etc.}$$

$$\text{Or}\quad \frac{1}{2}+\frac{1}{2.2}+\frac{1}{2.2.2}+\text{etc.}=1\,;\quad \text{donc}\quad e<3\,;$$

mais $e>2$; e n'est donc pas un nombre entier.

Si e était une fraction irréductible $\frac{m}{n}$, on aurait $n<m$, $n>1$, et l'on pourrait mettre e sous la forme

$$e=\frac{m}{n}=\left(2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}+\ldots+\frac{1}{2.3\ldots n}\right)+\frac{1}{2.3\ldots n}\left\{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\text{etc.}\right\}$$

Multipliant les deux membres par $2.3.4\ldots n$, il viendrait

$$m\times 2.3\ldots(n-1)=(2.2.3\ldots n+3.4\ldots n+\ldots+n+1)+\left\{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\text{etc.}\right\}$$

La somme de tous les termes de la série.............
$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+$ etc., serait donc un nombre entier α. Or, cette somme est moindre que

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\text{etc.},\ \text{et}\ \frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\text{etc.}=\frac{1}{n}.$$

Le nombre entier α serait donc moindre qu'une fraction $\frac{1}{n}$ plus petite que l'unité ; ce qui est absurde.

La valeur de e est donc incommensurable.

131. *Lorsqu'on prend pour valeur approchée de* e *la somme des* n *premiers termes de la série* (1), *l'erreur* E *est moindre que* $\frac{1}{2.3.4..n}\times\frac{1}{n}$, car

$$E=\frac{1}{2.3\ldots n}\times\left\{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\text{etc.}\right\},$$

et on vient de voir que $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\text{etc.}<\frac{1}{n}$.

On peut donc toujours prendre n assez grand pour que l'erreur soit aussi petite qu'on voudra.

Exemple. Si $n=10$, on trouve $e=2,7182818$ etc.; l'erreur est moindre que $\frac{1}{2.3\ldots9.10.10}$ ou que $\frac{1}{36288000}$ ou que $0,00000002$ etc.

132. Problème. *Développer $\log(1+x)$ suivant les puissances entières positives et croissantes de x.*

On cherche le développement de $\log(1+x)$, parce que celui de $\log x$ devant devenir infini par $x=0$, ne saurait procéder suivant les puissances positives de x. Nous venons de trouver que dans le développement de a^x, le coefficient de la première puissance de x est $\frac{\log a}{\log e}$; si donc nous cherchons ce coefficient par une autre voie, nous connaîtrons le développement de $\log a$ et par suite celui de $\log(1+x)$, en posant $a=1+x$. Or,

$$a^x=\{1+(a-1)\}^x=1+x(a-1)+\frac{x(x-1)}{1.2}(a-1)^2+\text{etc.},$$

et la somme des coefficiens de la première puissance de x sera

$$(a-1)-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\frac{(a-1)^4}{4}+\text{etc.}$$

Donc

$$\frac{\log a}{\log e}=(a-1)-\frac{(a-1)^2}{2}+\frac{(a-1)^3}{3}-\frac{(a-1)^4}{4}+\text{etc.}$$

Changeant a en $1+x$ et multipliant par $\log e$, il vient

$$(1)\ldots\log(1+x)=\log e\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\text{etc.}\right).$$

Si l'on prend e pour base du système, $\log e$ deviendra l'unité, et désignant les nouveaux logarithmes par la caractéristique l', on aura

$$(2)\ldots l'(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\text{etc.}$$

Cette série n'étant pas *convergente* pour des valeurs de x

plus grandes que 1, ne pourrait servir à calculer les logarithmes des nombres plus grands que 2. Pour la transformer en une autre qui soit convergente, changeons x en $-x$, nous aurons

$$l(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \text{etc.}$$

Retranchant ce développement du premier, il vient

$$l(1+x) - l(1-x) = l\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \text{etc.}\right).$$

Pour rendre cette formule convergente et d'une application commode, faisons

$$\frac{1+x}{1-x} = 1 + \frac{1}{y}; \text{ nous en déduirons}$$

$$x = \frac{1}{2y+1}, \text{ et par suite}$$

$$l\left(1+\frac{1}{y}\right) = 2\left\{\frac{1}{2y+1} + \frac{1}{3(2y+1)^3} + \frac{1}{5(2y+1)^5} + \text{etc.}\right\}.$$

$$\text{Or, } l\left(1+\frac{1}{y}\right) = l\left(\frac{y+1}{y}\right) = l(y+1) - l(y). \text{ Donc}$$

$$(3)\ldots\ l(y+1) - ly = 2\left\{\frac{1}{2y+1} + \frac{1}{3(2y+1)^3} + \text{etc.}\right\}.$$

Cette série donnant la différence entre les logarithmes de deux nombres entiers consécutifs, fera connaître les logarithmes de tous les nombres entiers, en donnant à y les valeurs 1, 2, 3, etc. De plus elle est fort convergente, et il suffira d'en calculer un très petit nombre de termes. On calculera de cette manière les logarithmes des nombres dans la base e.

Si l'on veut ensuite construire une *table*, d'après une base quelconque a, il suffira de multiplier tous les premiers logarithmes par $\frac{1}{la}$; cette constante prend le nom de *module*; et sa valeur pour passer de la base e dans la base 10 est 0,434294481 9 etc.

133. Il est facile de *parvenir directement à la série qui exprime le logarithme de* $1+x$. En effet; ce logarithme se réduit à zéro quand $x=0$, et quand la *base* est donnée, un nombre n'a qu'un seul logarithme réel; on est donc conduit à poser

$$(1)\ldots\log(1+x)=M(x+ax^2+bx^3+cx^4+dx^5+\text{etc.})=f(x);$$

d'où $f'(x)=M(1+2ax+3bx^2+4cx^3+5dx^4+\text{etc.})$

Pour obtenir une autre valeur de $f'(x)$, on change x en $x+h$ dans $f(x)$; ce qui donne

$$f(x+h)=\log(1+x+h)=\log\left\{(1+x)\left(1+\frac{h}{1+x}\right)\right\}$$

$$=\log(1+x)+\log\left(1+\frac{h}{1+x}\right).$$

Mais, d'après la formule (1),

$$\log\left(1+\frac{h}{1+x}\right)=M\left\{\frac{h}{1+x}+\frac{ah^2}{(1+x)^2}+\text{etc.}\right\}.$$

Donc

$$f'(x)=\frac{M}{1+x}=M\left(\frac{1}{1+x}\right)=M(1-x+x^2-x^3+\text{etc.}).$$

Les deux valeurs de $f'(x)$ devant être identiques, il faut que

$$2a=-1,\ 3b=+1,\ 4c=-1,\ 5d=+1;\ \text{etc.};$$

d'où $a=-\frac{1}{2},\ b=+\frac{1}{3},\ c=-\frac{1}{4},\ d=+\frac{1}{5}$, etc.

La série (1) devient

$$(2)\ldots\log(1+x)=M\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\text{etc.}\right).$$

Le module M ne pourra se déterminer que lorsqu'on donnera la *base* du système de logarithmes.

Désignant par l' les logarithmes qui correspondent à $M=1$, et représentant par e la base de ce système, la formule (2) conduit à la formule (2) (page 128), et par suite à la formule (3) (page 129); cette dernière sert à calculer les logarithmes des nombres entiers dans la base e; on en déduit la valeur.... 0,43429 etc., de $\frac{1}{l'10}$; et ces logarithmes multipliés par le *module* 0,43429 etc., fournissent les logarithmes des mêmes nombres pris dans le système *tabulaire* dont la base est 10.

Pour calculer la base e qui correspond à $M=1$, on observe que si α exprime $l'10$, on aura $e^\alpha=10$. Prenant les logarithmes *tabulaires* des deux membres de cette égalité, et désignant ces logarithmes par l, il vient

$$l(e^\alpha)=l10,\ \alpha le=1,\ le=\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{l'10}=0{,}43429 \text{ etc.}$$

Cherchant dans nos *tables* à quel nombre correspond le logarithme 0,43429 etc., on trouve que $e=2{,}7182$ etc.; ce qui s'accorde avec le résultat du n° 131.

134. *Dans toute série dont les termes sont alternativement positifs et négatifs, si chaque terme est moindre que le précédent, la somme des* n *premiers termes différera de la somme de tous les termes, d'une quantité moindre que le* $n+1^{ième}$ *terme*. En effet; soit une série de cette espèce

$$S=a-b+c-d+e-f+g-\text{etc.},$$

a, b, c, d, e, f, g, etc., seront des nombres positifs, et on aura $b<a$, $c<b$, $d<c$, $e<d$, $f<e$, $g<f$, etc. Or

$$S=a-(b-c)-(d-e)-(f-g)-\text{etc.},$$
$$S=a-b+(c-d)+(e-f)+\text{etc.},$$
$$S=a-b+c-(d-e)-(f-g)-\text{etc.}$$

Et ainsi de suite. Chacun des binomes compris entre parenthèses étant positif, on voit que

$$S<a,\ S>a-b,\ S<a-b+c,\ S>a-b+c-d, \text{ etc.};$$

ce qui démontre le principe énoncé. On voit de plus que les sommes partielles sont alternativement au-dessus et au-dessous de la somme totale.

135. Problème. *Développer sin x et cos x suivant les puissances croissantes de x.*

Ces développemens ne pourront renfermer que des puissances entières et positives de x, par les mêmes raisons que dans les fonctions précédentes; de plus, sin x ne pourra renfermer que des puissances impaires de x, et cos x des puissances paires, parce que le premier développement doit changer de signe avec x, et le second rester le même. Et comme $x=0$, réduit cos x au rayon 1, on doit poser

$$\sin x = ax + bx^3 + cx^5 + dx^7 + \text{etc.},$$
$$\cos x = 1 + \alpha x^2 + \mathit{6} x^4 + \gamma x^6 + \text{etc.}$$

Remplaçons x par $x+h$ dans sin x, et prenons le coefficient de la première puissance de h, ce coefficient sera la dérivée de sin x ou de son développement. Or

$$\sin(x+h) = \cos h \sin x + \sin h \cos x.$$

Remplaçant sin h et cos h par leurs développemens, qu'on obtiendra en changeant x en h dans ceux de sin x et cos x, il viendra

$$\sin(x+h) = (1 + \alpha h^2 + \text{etc.}) \sin x + (ah + bh^3 + \text{etc.}) \cos x.$$

Le coefficient de la première puissance de h, dans ce développement, est a cos x; l'égalant à la dérivée du développement de sin x, qui est

$$a + 3bx^2 + 5cx^4 + 7dx^6 + \text{etc.},$$

on aura l'identité

$$a(1 + \alpha x^2 + \mathit{6} x^4 + \text{etc.}) = a + 3bx^2 + 5cx^4 + \text{etc.};$$

d'où

$$(1) \ldots a = a, \quad 3b = a\alpha, \quad 5c = a\mathit{6}, \quad 7d = a\gamma, \text{etc.}$$

Agissant de la même manière pour cos x, on aura

$$\cos(x+h)=\cos x\cos h-\sin x\sin h.$$

Le coefficient de la première puissance de h sera dans ce cas $-a\sin x$, et l'égalant à la dérivée de $\cos x$, il viendra

$$-a(ax+bx^3+cx^5+\text{etc.})=2\alpha x+4\mathfrak{C}x^3+6\gamma x^5+\text{etc.};$$

d'où

$$(2)\ldots 2\alpha=-a^2,\quad 4\mathfrak{C}=-ab,\quad 6\gamma=-ac, \text{etc.}$$

Les équations (1) et (2) donnent successivement

$$\alpha=-\frac{a^2}{2},\quad b=-\frac{a^3}{2.3},\quad \mathfrak{C}=\frac{a^4}{2.3.4},\quad c=\frac{a^5}{2.3.4.5}, \text{etc.}$$

Les développemens de sin x et cos x deviennent

$$\sin x=ax-\frac{a^3x^3}{1.2.3}+\frac{a^5x^5}{1.2.3.4.5}-\text{etc.},$$

$$\cos x=1-\frac{a^2x^2}{1.2}+\frac{a^4x^4}{1.2.3.4}-\text{etc.}$$

Pour déterminer la constante a, nous observerons que quand x tend indéfiniment vers zéro, le rapport $\frac{\sin x}{x}$ tend indéfiniment vers l'unité. En effet, si d'un point on mène deux tangentes à un cercle, la somme de leurs parties comprises entre ce point et les points de contact sera plus grande que l'arc convexe qu'elles embrassent; le même rapport existant entre l'une des tangentes et la moitié du même arc, il s'ensuit d'abord qu'un arc est plus petit que sa tangente; or l'arc est évidemment plus grand que son sinus. Donc $\frac{\sin x}{x}$ est toujours plus grand que $\frac{\sin x}{\tang x}$, mais plus petit que l'unité. Or $\frac{\sin x}{\tang x}=\cos x$; donc la limite est l'unité quand x tend vers zéro : donc à plus

forte raison $\frac{\sin x}{x}$ qui est compris entre 1 et $\frac{\sin x}{\operatorname{tang} x}$, s'approchera indéfiniment de 1; donc enfin la limite de $\frac{\sin x}{x}$ est 1. Or, en divisant par x le développement de sin x, et faisant converger x vers 0, on trouve a pour limite du rapport; donc $a=1$, et par conséquent

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{etc.},$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{etc.}$$

Ces formules sont très convergentes pour les arcs plus petits qu'un demi-quadrant; car les termes décroissant rapidement et étant alternativement positifs et négatifs, l'erreur commise en s'arrêtant à un terme est moindre que le suivant (n° 134) : c'est par elles que l'on calcule les tables des lignes trigonométriques.

136. Si l'on change x en $x\sqrt{-1}$ dans le développement de e^x (*voyez* page 126), on aura

$$e^{x\sqrt{-1}} = 1 + x\sqrt{-1} - \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

Comparant cette série avec celles qui expriment sin x et cos x, on en conclura identiquement

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1} \sin x.$$

Si dans cette équation on change x en mx, il viendra

$$e^{mx\sqrt{-1}} = \cos mx + \sqrt{-1} \sin mx.$$

$$\text{Or } e^{mx\sqrt{-1}} = (e^{x\sqrt{-1}})^m = (\cos x + \sqrt{-1} \sin x)^m;$$

d'où il résulte, quel que soit m,

$$(\cos x + \sqrt{-1} \sin x)^m = \cos mx + \sqrt{-1} \sin mx.$$

Réflexions préliminaires et Problèmes sur l'écoulement des liquides.

137. Lorsque pendant des temps égaux quelconques les quantités de liquide qui sortent d'un vase sont égales, on dit que la *vitesse* de l'écoulement est *constante*, et par vitesse on entend la quantité de liquide qui sort pendant l'unité de temps.

Lorsqu'au contraire les quantités de liquide qui sortent pendant des temps égaux quelconques ne sont pas égales, la *vitesse* de l'écoulement est *variable*.

Nous allons résoudre plusieurs problèmes en supposant que chaque vase est un cylindre vertical dont toutes les sections horizontales sont égales entre elles, que le liquide sort par un orifice horizontal pratiqué au fond du vase, que la surface supérieure du liquide reste plane et horizontale, que la vitesse variable de l'écoulement est proportionnelle à la hauteur du liquide dans le vase, et que a désigne la constante par laquelle il faut multiplier la hauteur du liquide pour obtenir la vitesse correspondante de l'écoulement.

Cela posé : si la hauteur du fluide dans un vase étant h mètres, chaque section horizontale de l'intérieur du vase est q mètres carrés, le volume total du fluide sera qh mètres cubes. Désignant donc ce volume par V mètres cubes, on aura

$$V = qh; \quad \text{d'où} \quad h = \frac{V}{q}.$$

Ainsi, le nombre d'unités cubes du liquide contenu dans le vase, divisé par le nombre d'unités de surface de chaque section horizontale de l'intérieur du vase, donne pour quotient le nombre de mètres de hauteur du liquide dans le vase.

Pour déterminer la valeur de a relative à un vase donné, on mesurera la hauteur du liquide dans ce vase ; soit h mètres cette hauteur ; on laissera sortir le liquide pendant l'unité de temps, en entretenant toujours l'eau à la même hauteur h ; la vitesse de l'écoulement sera constante, et si la quantité de fluide qui sort pendant cette unité de temps est v mètres cubes, alors

v sera la *vitesse de l'écoulement due à la hauteur* h *du fluide;* on aura $v = ah$, d'où $a = \frac{v}{h}$. On connaîtra donc a.

La vitesse de l'écoulement à un instant quelconque est donc la quantité de fluide qui sortirait pendant l'unité de temps si a partir de cet instant la vitesse de l'écoulement devenait constante.

La valeur de a sera supposée la même dans les vases que nous considérerons.

Ces hypothèses sont rarement d'accord avec ce qui se passe réellement dans la nature, mais il ne s'agit ici que d'exercer le raisonnement des élèves.

138. 1[er] Problème. *La quantité d'eau contenue dans un vase est* p; *le liquide sort avec une vitesse variable proportionnelle à chaque instant à la hauteur de l'eau. Combien restera-t-il d'eau dans ce vase après* t *heures d'écoulement? Toutes les sections horizontales du vase sont constantes et égales à* q *mètres carrés.* Pour résoudre ce problème, nous concevrons que l'heure, prise pour unité de temps, est divisée en n instans égaux; la durée de chaque instant sera $\frac{1 \text{ heure}}{n}$, ou $\frac{1}{n}$, et les t heures contiendront tn instans. Nous supposerons d'abord que la vitesse de l'écoulement ne varie qu'au commencement de chaque instant, c'est-à-dire que cette vitesse est constante pendant chaque instant et variable d'un instant à l'autre; ce qui approchera d'autant plus de fournir la solution demandée, que le nombre des instans sera plus grand. Lorsque nous aurons trouvé la formule générale qui correspond à cette hypothèse, nous supposerons que le nombre n des instans contenus dans l'unité de temps est infini; la durée de chaque instant devenant infiniment petite, nous aurons exprimé que la vitesse de l'écoulement varie au commencement de chaque instant infiniment petit, c'est-à-dire d'une manière continue; le problème sera donc résolu.

Effectuons ces calculs, et cherchons d'abord comment la quantité d'eau contenue dans le vase à la fin d'un instant, se déduit de ce qu'il y avait au commencement de cet instant. Si la quan-

tité d'eau renfermée dans le vase au commencement d'un instant est R, et si la hauteur correspondante du liquide est h, le volume R du fluide sera égal à qh; de sorte que $h=\frac{R}{q}$; la vitesse constante de l'écoulement pendant cet instant sera $\frac{aR}{q}$, c'est-à-dire que la quantité d'eau qui sortirait en une heure ou en n instans, si la vitesse restait constante, serait $\frac{aR}{q}$; ce qui sort pendant un instant est donc $\frac{aR}{qn}$; la quantité d'eau qui restera à la fin de cet instant sera donc $R\left(1-\frac{a}{qn}\right)$.

Désignant par b la constante $1-\frac{a}{qn}$, on voit que *la quantité d'eau renfermée dans le vase au commencement d'un instant quelconque étant* R, *pour obtenir ce qui en restera à la fin de cet instant, il suffit de multiplier* R *par la constante* b.

Cette dernière propriété conduit à la solution du problème, car la quantité de liquide contenue dans le vase au commencement du 1er instant de l'écoulement étant p, les quantités d'eau qui resteront dans le vase à la fin du 1er instant, du 2e, . . . , du $tn^{ième}$, seront $pb, pb^2, \ldots, pb^{tn}$. Nommant donc x la quantité de liquide qui restera dans le vase après t heures d'écoulement, on aura

$$x=pb^{tn}=p\left(1-\frac{a}{qn}\right)^{nt}.$$

Pour trouver ce que devient cette valeur de x quand n est infiniment grand, c'est-à-dire quand la vitesse varie d'une manière continue, on développera d'abord $\left(1-\frac{a}{qn}\right)^{nt}$, par la formule du binome, et l'on verra aisément que ce développement peut se mettre sous la forme

$$\left(1-\frac{a}{qn}\right)^{nt}=1-\frac{at}{q}+\frac{t\left(t-\frac{1}{n}\right)}{1\,.\,2}\frac{a^2}{q^2}-\frac{t\left(t-\frac{1}{n}\right)\left(t-\frac{2}{n}\right)}{1\,.\,2\,.\,3}\frac{a^3}{q^3}+\text{etc.}$$

Lorsque n est infini, les fractions $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$, etc., se réduisent à zéro, et en faisant $\frac{at}{q} = z$, la formule demandée devient

$$x = p\left(1 - z + \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{2.3} + \text{etc.}\right).$$

Or, en désignant par e la base des logarithmes *népériens*, et en faisant $x = -z$ dans la formule (3) (page 126), on trouve

$$e^{-z} = 1 - z + \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{2.3} + \text{etc.}$$

Donc enfin, $$x = pe^{-z}.$$

Cette valeur de x est très remarquable par sa simplicité; elle fournit la solution du problème proposé.

139. 2e Problème. *On a deux vases; l'eau sort du premier, entre dans le second, et sort du second par la partie inférieure. L'eau sort du premier vase avec la vitesse constante* v'; *elle sort du second vase avec une vitesse variable, proportionnelle à la hauteur de l'eau dans ce vase. Lorsque l'écoulement commence, le premier vase et le second contiennent respectivement* p' *et* p *mètres cubes d'eau. Toutes les sections horizontales du premier vase sont égales à* q' *mètres carrés, et celles du second sont égales à* q *mètres carrés. On demande combien il restera d'eau dans chaque vase, après* t *heures d'écoulement.*

Dans le premier vase, il restera $(p' - tv')$ mètres cubes d'eau.

Pour trouver ce qui restera dans le second vase, on raisonnera comme dans le problème précédent, et l'on dira : si à un instant quelconque, la quantité d'eau qui reste dans le second vase est R, la hauteur de l'eau sera $\frac{R}{q}$, et la vitesse de l'écoulement sera $\frac{aR}{q}$; pendant cet instant, il sortira $\frac{aR}{nq}$, il en entrera $\frac{v'}{n}$; donc à la fin de cet instant, la quantité d'eau qui restera

dans le vase sera

$$\left(R + \frac{v'}{n} - \frac{aR}{nq}\right), \quad \text{ou} \quad R\left(1 - \frac{a}{qn}\right) + \frac{v'}{n}, \quad \text{ou} \quad \left(Rb + \frac{v'}{n}\right).$$

Ainsi, le nombre de mètres cubes d'eau contenus dans le second vase au commencement d'un instant quelconque étant R, *la quantité d'eau qui restera dans ce vase à la fin de cet instant sera* $\left(Rb + \frac{v'}{n}\right)$.

Cette propriété générale conduit à la solution du problème; car au commencement de l'écoulement, le deuxième vase contenant p mètres cubes d'eau, si la vitesse ne variait qu'au commencement de chaque instant, les nombres de mètres cubes d'eau qui resteraient successivement dans ce vase, seraient

Fin du 1er instant $\quad pb + \frac{v'}{n},$

2e instant $\quad \left(pb + \frac{v'}{n}\right)b + \frac{v'}{n} = pb^2 + \frac{v'}{n}(1 + b),$

3e instant $\quad \left\{pb^2 + \frac{v'}{n}(1 + b)\right\} \times b + \frac{v'}{n} = pb^3 + \frac{v'}{n}(1 + b + b^2),$

⋮

Fin du $tn^{ième}$ inst. $\quad pb^{tn} + \frac{v'}{n}(1 + b + b^2 + .. + b^{tn-1}) = pb^{tn} + \frac{v'}{n}\left(\frac{b^{tn} - 1}{b - 1}\right).$

Désignant donc par x la quantité d'eau qui restera dans le second vase, après t heures d'écoulement, on aura

$$x = pb^{tn} + \frac{v'}{n}\left(\frac{1 - b^{tn}}{1 - b}\right).$$

$$\text{Mais } b = 1 - \frac{a}{qn}; \text{ donc } 1 - b = \frac{a}{qn}.$$

Substituant cette valeur de $1 - b$, on trouve

$$x = \left(p - \frac{v'q}{a}\right)b^{tn} + \frac{v'q}{a}.$$

Lorsque n est infini, b^{tn} devient e^{-z} (n° 138), la vitesse de l'écoulement varie d'une manière continue, et le nombre de mètres cubes d'eau qui restent dans le second vase après t heures

d'écoulement est donné par la formule

$$x = \left(p_{\prime} - \frac{v'q}{a}\right) e^{-z} + \frac{v'q}{a}.$$

140. 3ᵉ Problème. *On a deux vases, l'eau sort du premier, entre dans le second, et sort du second par la partie inférieure. Les vitesses d'écoulement, par les deux orifices, sont variables et proportionnelles aux hauteurs de l'eau au-dessus de ces orifices. On demande combien il restera d'eau dans chaque vase après* t *heures d'écoulement.*

Nous conserverons la notation précédente, et nous ferons

$$1 - \frac{a}{qn} = b, \quad 1 - \frac{a}{q'n} = b', \quad \frac{at}{q} = z, \quad \frac{at}{q'} = z'.$$

On a vu dans le nº 138, que la quantité d'eau qui reste dans le premier vase après t heures d'écoulement est $p'e^{-z'}$.

Soit y la quantité de liquide qui restera dans le second vase après t heures d'écoulement. Pour trouver la valeur de y, on supposera qu'au commencement d'un instant quelconque les nombres de mètres cubes d'eau contenus dans le premier vase et dans le deuxième, soient R' et R; les hauteurs de l'eau seront $\frac{R'}{q'}$ et $\frac{R}{q}$; les vitesses d'écoulement seront $\frac{aR'}{q'}$ et $\frac{aR}{q}$. Les quantités d'eau écoulées pendant cet instant seront $\frac{aR'}{nq'}$ et $\frac{aR}{nq}$; donc à la fin de cet instant, le premier vase ne contiendra plus que

$$\left(R' - \frac{aR'}{nq'}\right) \quad \text{ou} \quad R'b',$$

et le second en contiendra

$$R - \frac{aR}{nq} + \frac{aR'}{nq'} \quad \text{ou} \quad Rb + \frac{aR'}{nq'}.$$

Ainsi, *les nombres de mètres cubes d'eau contenus dans le premier vase et dans le deuxième, au commencement d'un instant quelconque étant* R' *et* R, *les quantités d'eau qui restent*

dans ces vases, après cet instant, sont

$$R' \times b' \text{ et } \left(R \times b + R' \times \frac{a}{nq'}\right).$$

Ces formules donnant le moyen de passer d'un instant à l'autre, on verra facilement que les nombres de mètres cubes d'eau qui resteraient dans chaque vase, si la vitesse ne variait qu'à chaque instant, seraient

Au commencement du 1[er] instant, dans le 1[er] vase p', dans le 2[e] vase p,

Fin du 1[er] inst., 1[er] vase $p'b'$, 2[e] vase $pb + p'\frac{a}{nq'}$,

2[e] inst., 1[er] vase $p'b'^2$, 2[e] vase $pb^2 + \frac{p'a}{nq'}(b+b')$

$$= pb^2 + \frac{p'a}{nq'}\left(\frac{b^2 - b'^2}{b - b'}\right),$$

3[e] inst., 1[er] vase $p'b'^3$, 2[e] vase $pb^3 + \frac{p'a}{nq'}(b^2 + bb' + b'^2)$

$$= pb^3 + \frac{p'a}{nq'}\left(\frac{b^3 - b'^3}{b - b'}\right),$$

Fin du 4[e] inst., 1[er] vase $p'b'^4$, 2[e] vase $pb^4 + \frac{p'a}{nq'}(b^3 + b^2b' + bb'^2 + b'^3)$

$$= pb^4 + \frac{p'a}{nq'}\left(\frac{b^4 - b'^4}{b - b'}\right).$$

Par conséquent, si la vitesse ne variait qu'au commencement de chaque instant, les y mètres cubes d'eau qui resteraient dans le second vase après tn instans, seraient donnés par la formule

$$y = pb^{tn} + \frac{p'a}{nq'}\left(\frac{b^{tn} - b'^{tn}}{b - b'}\right).$$

Mais $\qquad b = 1 - \frac{a}{qn}$ et $b' = 1 - \frac{a}{q'n}$;

donc $\qquad \frac{a}{q'n(b - b')} = \frac{q}{q - q'}$;

donc... $y = pb^{tn} + \frac{p'q}{q - q'}(b^{tn} - b'^{tn}) = \left(p + \frac{p'q}{q - q'}\right)b^{tn} - \frac{p'qb'^{tn}}{(q - q')}$.

Supposant n infini, b^{tn} et b'^{tn} deviennent e^{-z} et $e^{-z'}$; donc enfin

$$y = \left(p + \frac{p'q}{q - q'}\right) e^{-z} - \left(\frac{p'q}{q - q'}\right) e^{-z'}.$$

Si les sections horizontales q, q' des deux vases étaient égales, b deviendrait égal à b', et la valeur de y renfermerait des termes infinis. Pour trouver la valeur de y, correspondante à l'hypothèse $q = q'$, d'où $b = b'$, on prendra la formule

$$y = pb^{tn} + \frac{p'a}{nq'}\left(\frac{b^{tn} - b'^{tn}}{b - b'}\right).$$

Cette valeur de y se présentant sous la forme $\frac{0}{0}$, on divisera $b^{tn} - b'^{tn}$ par $b - b'$, ce qui donnera le quotient exact...... $b^{tn-1} + b^{tn-2}b' + b^{tn-3}b'^2 + \text{. . .} + b'^{tn-1}$; supposant $b = b'$, ce quotient devient $tn \times b^{tn-1}$; de sorte que la valeur de y est

$$y = pb^{tn} + \frac{p'a}{nq} \times tnb^{tn-1} = \left(p + \frac{ap't}{bq}\right) \times b^{tn}.$$

Supposant n infini, b^{tn} devient e^{-z}, b se réduit à l'unité, et l'on a

$$y = \left(p + \frac{ap't}{q}\right) e^{-z}.$$

141. 4ᵉ Problème. *Un vase rempli de vin se vide par un orifice, et ce vase est continuellement rempli par de l'eau ; de sorte que le liquide reste toujours à la même hauteur. Le mélange de l'eau et du vin se fait continuellement. On demande les proportions du mélange après un temps donné.*

Le liquide restant toujours à la même hauteur, la vitesse v de l'écoulement est constante ; conservant les notations précédentes, on verra que

$$v = \frac{p}{q}\, a\,; \quad \text{d'où} \quad \frac{a}{q} = \frac{v}{p}.$$

Pour résoudre le problème, on supposera d'abord que les proportions du mélange ne varient qu'au commencement de chaque instant. Supposant ensuite que le nombre des instans

est infini, on trouvera les formules demandées. Effectuons les calculs. Si au commencement d'un instant quelconque la quantité de vin contenue dans le vase est V, la quantité de mélange qui sortira pendant cet instant sera $\frac{v}{n}$ ou $\frac{ap}{nq}$. Or, sur la quantité p du mélange, il n'y a que V de vin; les $\frac{ap}{nq}$ mètres cubes de mélange ne contiennent donc que $\frac{a}{nq}$ V de vin; la quantité de vin qui restera dans le vase, après cet instant, sera donc

$$V - \frac{a}{nq}V = V\left(1 - \frac{a}{nq}\right) = Vb.$$

Ainsi, *pour passer de la quantité de vin contenue dans le vase au commencement d'un instant, à celle qui reste après cet instant, il suffit de multiplier la première quantité par* b.

Mais, au commencement du 1er instant de l'écoulement, le vase contenait p de vin; les quantités de vin contenues dans le vase à la fin du 1er instant, du 2e, du 3e, ..., du $tn^{ième}$, sont donc

$$pb,\ pb^2,\ \ldots,\ pb^{tn}.$$

Désignant ce dernier nombre par x, on aura

$$x = pb^{tn}.$$

Cette formule suppose que les proportions du mélange ne varient qu'au commencement de chaque instant. Pour que le mélange se fasse continuellement, il faut que n soit infiniment grand; alors b^{tn} devient e^{-z}, et l'on a

$$x = pe^{-z},\quad z = \frac{at}{q} = \frac{vt}{p}.$$

Telle est la quantité de vin qui restera dans le vase après t heures d'écoulement. Cette quantité diminue à mesure que le temps augmente, mais elle ne peut jamais devenir nulle; *le mélange contiendra donc toujours du vin.*

142. 5e. Problème. *On a deux vases, dont l'un ne contient*

que de l'eau, et dont l'autre ne renferme que du vin pur. L'eau sort du premier vase, entre dans le second, se mélange à l'instant, et sort ainsi mélangée. Les vitesses des écoulemens sont proportionnelles aux hauteurs des fluides au-dessus des orifices. On demande les proportions du mélange après un temps donné.

Nous supposerons toujours, que les sections horizontales des fluides dans le premier vase et dans le second sont q' et q; que les nombres de mètres cubes de fluide contenus dans ces vases, lorsque l'écoulement commence, sont p' et p. Si au commencement d'un instant quelconque, le second vase contient P de mélange, dont V de vin; alors la hauteur du mélange sera $\frac{P}{q}$, la vitesse de l'écoulement de ce mélange sera $\frac{aP}{q}$, et la quantité de mélange qui sortira pendant cet instant sera $\frac{aP}{nq}$ ou $\frac{a}{nq} \times P$. Mais P du mélange ne contient que V de vin pur; donc $\frac{a}{nq} \times P$ du mélange ne renferment que $\frac{a}{nq} \times V$ de vin.

De sorte que *le vin qui reste dans le second vase au commencement d'un instant quelconque étant* V, *le vin qui reste à la fin de cet instant est* $\left(V - \frac{a}{nq} V\right)$ ou bV.

Ce résultat étant le même que dans le problème précédent, on en conclura que le nombre de mètres cubes de vin qui restent dans le second vase après t heures d'écoulement est pe^{-z}. De sorte que *la quantité de vin qui reste dans le second vase est la même que s'il n'entrait pas d'eau.* On conçoit que cela est possible, car si d'un côté l'eau qui entre accélère la vitesse de l'écoulement, de l'autre elle diminue la proportion de vin du mélange; et le calcul démontre que la compensation est exacte. Les quantités de fluide qui restent dans chaque vase sont données par les formules du n° 140.

Problèmes sur les Maxima et les Minima.

143. Problème. *Partager un nombre* a *en deux parties dont la somme des carrés ou des racines carrées soit maximum ou minimum.*

1°. La somme des carrés est $x^2+(a-x)^2$ ou $2x^2-2ax+a^2$. La première dérivée donne l'équation $4x-2a=0$, d'où $x=\frac{1}{2}a$. La seconde dérivée étant positive, la somme des carrés est un minimum pour $x=\frac{1}{2}a$.

2°. La somme des racines carrées est

$$\sqrt{x}+\sqrt{a-x}.$$

Egalant la dérivée de cette fonction à zéro, il vient

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{a-x}}=0;\quad \text{d'où}\quad x=\frac{1}{2}a.$$

La seconde dérivée est $-\frac{1}{4x\sqrt{x}}-\frac{1}{4(a-x)\sqrt{a-x}}$, et comme $x=\frac{1}{2}a$ la rend négative, on a un maximum.

Dans ces deux cas les deux parties sont égales.

144. Problème. *Trouver le maximum de l'aire d'un triangle dont on connaît un côté* a *et le périmètre* 2p.

Cette aire a pour expression $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Il faut donc connaître le maximum du produit $(p-b)(p-c)$, sachant que $b+c=2p-a$; ce qui réduit ce produit à $(p-b)(a+b-p)$; b étant la variable, la dérivée sera $(p-b)-(a+b-p)$ qui égalée à zéro donnera

$$b=p-\frac{1}{2}a,\quad \text{et par suite}\quad c=p-\frac{1}{2}a.$$

Le triangle a donc les deux côtés cherchés égaux.

145. Problème. *Trouver le minimum de l'aire totale ou du volume d'un cône droit circonscrit à une sphère donnée.*

Soit a le rayon de la sphère et x la hauteur du cône, la surface totale du cône (*fig.* 10) aura pour mesure

$$\pi\mathrm{AN}.\mathrm{NX}+\pi\overline{\mathrm{AN}}^2, \quad \text{ou} \quad \pi\left(2\overline{\mathrm{AN}}^2+\mathrm{AN}.\mathrm{MX}\right).$$

Or on a $\mathrm{AN}:\mathrm{BM}::\mathrm{AX}:\mathrm{MX}$, ou $\mathrm{AN}:a::x:\sqrt{x^2-2ax}$.

Substituant, la surface conique totale deviendra

$$\pi\left(\frac{2a^2x^2}{x^2-2ax}+ax\right).$$

Pour en trouver le minimum, divisons par πa et réduisons, il vient

$$\frac{x^3}{x^2-2ax}, \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{x-2a}.$$

La dérivée égalée à zéro donne $2x(x-2a)-x^2=0$, ou $x^2-4ax=0$; d'où $x=4a$, car $x=0$ ne peut convenir.

La seconde dérivée deviendrait positive en y faisant $x=4a$; on a donc un minimum. Les valeurs correspondantes sont

$$\mathrm{BX}=3c,\quad \mathrm{XM}=a\sqrt{8},\quad \mathrm{AN}=a\sqrt{2},\quad \mathrm{NX}=3a\sqrt{2}.$$

2°. Le volume du même cône aura pour mesure

$$\frac{\pi\overline{\mathrm{AN}}^2.x}{3}, \quad \text{ou} \quad \frac{\pi a^2x^3}{3(x^2-2ax)}, \quad \text{ou} \quad \frac{\pi a^2x^2}{3(x-2a)}.$$

Il faudra donc encore trouver le minimum de $\frac{x^2}{x-2a}$; ce qui conduira aux mêmes résultats.

146. PROBLÈME. *On donne un levier dont le point d'appui est* A (*fig.* 11), *et auquel une force connue* P *est appliquée perpendiculairement à la distance* AB $=$ a; *le poids du levier est de* b *pour une unité de longueur; on demande en quel point il faut appliquer une force* X *minimum, qui produise l'équilibre.*

Soit k le point cherché, et $\mathrm{A}k=x$. Le poids du levier terminé en k, sera bx, et pourra être considéré comme appliqué

au milieu M de AB; on aura donc pour l'équilibre, l'équation

$$Pa + bx \times \frac{x}{2} = Xx, \text{ d'où } X = \frac{Pa}{x} + \frac{bx}{2}.$$

Pour que X soit un minimum, il faudra faire

$$\frac{-Pa}{x^2} + \frac{b}{2} = 0; \text{ d'où } x^2 = \frac{2Pa}{b}, \text{ et } x = \sqrt{\frac{2Pa}{b}}.$$

147. Problème. *Trouver entre deux points lumineux, le point le moins éclairé de la droite qui les joint.*

Soient m^2 et n^2, les intensités des lumières A et B, à l'unité de distance : Soit a la distance entre les points lumineux, et x celle du point cherché au point A.

L'intensité d'une lumière variant en raison inverse du carré de la distance au point éclairé, la somme des intensités des deux lumières sur le point cherché, sera

$$\frac{m^2}{x^2} + \frac{n^2}{(a-x)^2},$$

expression dont il faut avoir le minimum, ce qui donne

$$\frac{-2m^2x}{x^4} + \frac{2n^2(a-x)}{(a-x)^4} = 0,$$

ou $n^2x^3 = m^2(a-x)^3$; d'où $(a-x)\sqrt[3]{m^2} = x\sqrt[3]{n^2}$.

Cette dernière équation conduit à

$$x = \frac{a\sqrt[3]{m^2}}{\sqrt[3]{m^2} + \sqrt[3]{n^2}}.$$

Lorsque $m = n$, on trouve $x = \frac{1}{2}a$.

Il est facile de s'assurer que cette valeur de x détermine un minimum.

148. Problème. *Trouver le maximum du produit de m facteurs dont la somme est donnée.*

Nous avons vu que dans le cas de deux facteurs, il fallait qu'ils fussent égaux. Or, si les m facteurs n'étaient pas égaux dans le cas du maximum de leur produit, on pourrait en prendre deux d'entre eux inégaux, et les rendre égaux sans changer leur somme, le produit serait alors plus grand qu'auparavant; il n'était donc pas le plus grand possible. Sa plus grande valeur correspond donc à l'égalité de ces facteurs; ce qui en détermine la valeur.

149. **Problème.** *Trouver le maximum ou le minimum de la somme des puissances d'un même degré donné* m *de quantités variables* a, b, c, ..., k, *dont la somme est constante.*

Nous avons vu, n° 42, que quand il n'y avait que deux quantités, il fallait qu'elles fussent égales, et que la somme de leurs puissances du degré m, était un minimum quand m était positif et plus grand que l'unité, ou avait une valeur négative quelconque; et qu'elle était un maximum quand m était positif et plus petit que l'unité. Il est facile d'en conclure que le maximum et le minimum ont lieu dans les mêmes circonstances, quel que soit le nombre des quantités $a, b, \ldots, k$; c'est ce que l'on fera voir en démontrant par un raisonnement déjà employé précédemment, qu'il est impossible que dans le cas du maximum ou du minimum, il y ait deux de ces quantités inégales.

150. **Problème.** *Trouver le maximum de l'aire d'un triangle dont on connaît le périmètre* 2p.

L'expression de l'aire sera, en appelant x et y deux des côtés,

$$\sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}$$

il faut donc avoir le maximum de $(p-x)(p-y)(x+y-p)$. Les deux dérivées partielles égalées à zéro, donnent

$$-(p-y)(x+y-p)+(p-x)(p-y)=0,$$
$$-(p-x)(x+y-p)+(p-x)(p-y)=0;$$

d'où l'on conclut immédiatement $p-y=p-x$, ou $y=x$. Reportant dans l'une des deux équations, il vient

$$x=\frac{2p}{3}, \text{ et par suite } y=\frac{2p}{3},\ 2p-x-y=\frac{2p}{3}.$$

Le triangle est donc équilatéral, et on s'assurera, comme dans les cas précédens, qu'il est maximum.

151. Problème. *Trouver le maximum du volume d'un parallélépipède dont la somme des arêtes contiguës est une constante* a.

Soient x, y, z ces arêtes, on aura $x+y+z=a$, et le volume xyz deviendra $xy(a-x-y)$.

Les deux dérivées partielles égalées à zéro conduisent à

$$y(a-x-y)-xy=0, \quad x(a-x-y)-xy=0.$$

La simple inspection de ces équations donne $y=x$, et substituant dans l'une des deux, il vient

$$x(a-2x)-x^2=0, \quad \text{ou} \quad ax-3x^2=0; \quad \text{d'où}$$

$$x=\frac{a}{3}, \quad \text{et par suite} \quad y=\frac{a}{3}, \quad z=\frac{a}{3}.$$

Le parallélépipède est donc un cube.

Les secondes dérivées feront voir facilement qu'il est un maximum.

152. Problème. *Partager un nombre connu* a *en trois parties* x, y, a — x — y, *telles que le produit* $x^m y^n (a-x-y)^p$ *soit maximum ou minimum.*

Les deux dérivées partielles par rapport à x et y, étant égalées à zéro et réduites, donnent

$$m(a-x-y)-px=0, \quad n(a-x-y)-py=0;$$

$$\text{d'où } x=\frac{ma}{m+n+p}, \; y=\frac{na}{m+n+p}, \; a-x-y=\frac{pa}{m+n+p}.$$

On voit donc qu'il suffit de partager le nombre donné a en trois parties, qui soient dans le rapport des exposans, m, n, p.

En formant les secondes dérivées, on reconnaîtra qu'elles satisfont aux conditions du maximum.

Lorsque $m=n=p$, les trois parties sont égales, et on retombe sur l'exemple précédent.

153. Problème. *Trouver le maximum du carré du produit des*

racines supposées réelles de l'équation du troisième degré dont les deux premiers termes sont $x^3 + px$.

Soient a, b, c, les trois racines, on aura

$$a + b + c = 0, \quad ab + ac + bc = p.$$

Pour trouver le maximum de $a^2b^2c^2$, on égalera à zéro sa dérivée par rapport à a, ce qui donnera, en observant que abc ne peut être nul dans le cas du maximum, $bc + acb' + abc' = 0$. L'égalant à zéro et dérivant les deux équations données, on aura

$$\begin{aligned} bc + acb' + abc' &= 0, \\ 1 + b' + c' &= 0, \\ b + ab' + c + ac' + bc' + cb' &= 0. \end{aligned}$$

Eliminant b' et c', on trouve $a = c$. Reportant dans les deux premières, on obtient les trois valeurs suivantes :

$$b = 2\frac{\sqrt{-p}}{\sqrt{3}}, \quad c = \frac{-\sqrt{-p}}{\sqrt{3}}, \quad a = \frac{-\sqrt{-p}}{\sqrt{3}}.$$

Formant la seconde dérivée de $a^2b^2c^2$ et y reportant ces valeurs, elle sera négative; d'où l'on conclura que le produit $a^2b^2c^2$ est un maximum. Si donc on désigne par q le dernier terme de l'équation proposée, le carré de ce produit sera plus grand que q^2, qui est le carré du produit des racines, ou lui sera tout au plus égal. Les racines ne seront donc pas toutes réelles, si l'on a

$$q^2 > a^2b^2c^2, \text{ ou } q^2 > \frac{-4p^3}{27}, \text{ ou enfin } 4p^3 + 27q^2 > 0.$$

Telle est, en effet, la condition connue pour que l'équation $x^3 + px + q = 0$, ait deux racines imaginaires.

154. Problème. *Trouver l'aire maximum du rectangle inscrit dans un triangle donné.*

Soient ABC (*fig.* 12) le triangle donné, a, b, c, les côtés opposés aux angles A, B, C; h la hauteur A, et x, y les côtés du

rectangle inscrit, on aura

$$y : h :: \text{BE} : c, \quad x : a :: \text{AE} : c.$$

Or, $\text{BE} + \text{AC} = c$; substituant les valeurs de AE et BE, tirées des deux proportions, il vient

$$\frac{cy}{h} + \frac{cx}{a} = c; \quad \text{d'où} \quad ay + hx = ah.$$

Pour trouver le maximum de xy, on aura, en notant toujours les dérivées par des accens, $y + xy' = 0$.

Dérivant l'équation donnée, on a $ay' + h = 0$, et éliminant y', il vient

$$y - \frac{hx}{a} = 0; \quad \text{d'où} \quad ay = hx,$$

équation qui, jointe à $ay + hx = ah$, donne $2hx = ah$; d'où $x = \frac{a}{2}$, et par suite $y = \frac{h}{2}$, et l'aire sera $\frac{ah}{4}$, moitié de celle du triangle.

Le signe de la seconde dérivée de xy, fera voir que ce produit est un maximum.

155. Problème. *Trouver la plus courte et la plus grande distance d'un point à un cercle donné dans le même plan.*

Soient a, b, les deux coordonnées du point, $x^2 + y^2 = \text{R}^2$ l'équation du cercle, et x, y, les coordonnées d'un quelconque de ses points : il faudra trouver le maximum et le minimum de $(x-a)^2 + (y-b)^2$; ce qui conduit à

$$(x-a) + (y-b)y' = 0,$$

y' étant la dérivée d'y.

Or, l'équation du cercle donne $\quad x + yy' = 0.$

Eliminant y', il vient

$$x - a - (y-b)\frac{x}{y} = 0,$$

d'où

$$-ay + bx = 0,$$

équation qui, jointe à $x^2 + y^2 = R^2$, donne

$$x = \frac{\pm aR}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad y = \frac{\pm bR}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Les signes supérieurs déterminent un minimum et les inférieurs un maximum, lorsque a et b sont positifs; c'est ce que fait voir le signe de la seconde dérivée de $(x-a)^2+(y-b)^2$. Les deux points construits sont les intersections du cercle et de la droite, menée par son centre et le point donné.

156. Problème. *Trouver le maximum du volume d'un cylindre dont on connaît la surface totale* m^2.

En désignant le rayon de la base par R et la hauteur par h, on aura

$$(1)\ldots 2\pi R^2 + 2\pi Rh = m^2.$$

Le volume aura pour expression $\pi R^2 h$. Prenant les dérivées, il vient

$$2RR'h + R^2 = 0, \quad 2RR' + R'h + R = 0.$$

Eliminant R', on trouve (2)... $h = 2R$.

Les équations (1) et (2) donnent

$$R = m\sqrt{\frac{1}{6\pi}} \text{ et } h = m\sqrt{\frac{2}{3\pi}}.$$

Le volume $\pi R^2 h$ devient $m^3\sqrt{\frac{1}{54\pi}}$.

On verra, comme précédemment, que ce volume est maximum.

157. Problème. *Trouver le maximum du volume d'un cône droit dont la surface totale est* m^2.

Soient R le rayon de la base et x l'apothême, on aura

$$(1)\ldots \pi R^2 + \pi Rx = m^2.$$

Le volume aura pour expression $\frac{1}{3}\pi R^2\sqrt{x^2-R^2}$.

La dérivée égalée à zéro, donne

$$2R'(x^2 - R^2) + Rx - R^2R' = 0.$$

Dérivant l'équation (1), on a $2RR' + R + R'x = 0$.
Eliminant R', il vient $3R^2 - x^2 + 2Rx = 0$;
équation qui, jointe à la première, donne

$$R = \frac{m}{2\sqrt{\pi}} \text{ et } x = \frac{3m}{2\sqrt{\pi}};$$

d'où l'on voit que ce cône est semblable au cône minimum circonscrit à la sphère (n° 145).

Théorèmes sur les quantités moyennes.

158. On appelle moyenne entre plusieurs quantités, toute quantité comprise entre la plus petite et la plus grande. On donne le nom particulier de *moyenne arithmétique* entre m quantités, à leur somme divisée par m; et de *moyenne géométrique*, à la racine $m^{ième}$ de leur produit.

159. Théorème. *Soient des fractions quelconques à termes positifs*

$$\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''} \dots$$

la fraction (1). . $\dfrac{a + a' + a'' \dots}{b + b' + b'' \dots}$

sera moyenne entre les premières.

En effet, supposons ces fractions rangées par ordre de grandeur, et soit q le quotient de a par b; on aura

$$a = bq, \quad a' > b'q, \quad a'' > b''q, \dots$$

d'où

$$a + a' + a'' \dots > q(b + b' + b'' \dots) \text{ ou } \frac{a + a' + a''}{b + b' + b''} \dots > q.$$

La fraction (1) est donc plus grande que la plus petite des proposées. On prouverait semblablement qu'elle est plus petite que la plus grande; elle est donc moyenne entre elles.

COROLLAIRE. Les fractions, $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}, \ldots$,

étant respectivement égales aux suivantes

$$\frac{a\alpha}{b\alpha}, \frac{a'\alpha'}{b'\alpha'}, \frac{a''\alpha''}{b''\alpha''} \ldots$$

la fraction $\frac{a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' \ldots}{b\alpha + b'\alpha' + b''\alpha'' \ldots}$

sera encore moyenne entre les premières, $\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}$, etc.

COROLLAIRE. Si $b = b' = b'' = \ldots = 1$, la moyenne précédente devient

$$\frac{a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' \ldots}{\alpha + \alpha' + \alpha'' \ldots};$$

ce qui prouve que $a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \ldots$ est le produit de $\alpha + \alpha' + \alpha'' + \ldots$ par une moyenne entre les quantités a, a', a'', etc.

COROLLAIRE. On peut encore déduire de ce qui précède que l'expression $\sqrt[b+b'+b''\ldots]{aa'a''\ldots}$ est moyenne entre les quantités $\sqrt[b]{a}$, $\sqrt[b']{a'}$, $\sqrt[b'']{a''}$, etc.

En effet, posons $a = m^{\alpha}$, $a' = m^{\alpha'}$, $a'' = m^{\alpha''}$, ...,

les racines $\sqrt[b]{a}$, $\sqrt[b']{a'}$..., deviendront $m^{\frac{\alpha}{b}}$, $m^{\frac{\alpha'}{b'}}$, $m^{\frac{\alpha''}{b''}}$...

Or, $\frac{\alpha + \alpha' + \alpha'' + \ldots}{b + b' + b'' + \ldots}$ est moyenne entre $\frac{\alpha}{b}, \frac{\alpha'}{b'}, \frac{\alpha''}{b''}$, etc.,

donc $m^{\frac{\alpha + \alpha' + \alpha'' \ldots}{b + b' + b'' \ldots}}$ est moyenne entre $m^{\frac{\alpha}{b}}$, $m^{\frac{\alpha'}{b'}}$, $m^{\frac{\alpha''}{b''}}$, etc.

Repassant des exposans fractionnaires aux radicaux, et remplaçant m^{α}, $m^{\alpha'}$, ..., par a, a'..., il s'ensuit que $\sqrt[b+b'+b''+\ldots]{aa'a''\ldots}$ est moyenne entre $\sqrt[b]{a}$, $\sqrt[b']{a'}$, $\sqrt[b'']{a''}$, etc.

160. Théorème. *La moyenne arithmétique entre un nombre quelconque de quantités est toujours plus grande que leur moyenne géométrique; excepté lorsque toutes ces quantités sont égales, auquel cas les deux moyennes sont égales entre elles et aux quantités elles-mêmes.*

Soient les m quantités a, b, c, ..., k. Si l'on conçoit qu'on en fasse le produit, en laissant leur somme constante, nous avons vu que ce produit sera le plus grand possible quand elles seront égales entre elles, et par suite égales à leur moyenne arithmétique. Or la racine $m^{ième}$ de leur produit se trouve alors égale à l'une d'elles, ou à leur moyenne arithmétique; et dans tout autre cas ce produit étant moindre, sa racine $m^{ième}$ ou la moyenne géométrique sera moindre que la moyenne arithmétique.

161. Théorème. *La moyenne arithmétique entre les* m *puissances d'un même degré* a^x, b^x; c^x, ..., k^x, *est plus grande que la puissance du même degré de la moyenne arithmétique entre* a, b, c, ..., k, *lorsque* x *est positif et plus grand que l'unité, ou négatif et quelconque; elle est plus petite lorsque* x *est positif et moindre que l'unité.*

En effet, supposons que $a+b+c+\ldots+k$ reste constant; nous avons vu (page 148) que la somme $a^x+b^x+c^x+\ldots+k^x$ sera la plus petite possible quand on aura $a=b=c=\ldots=k$.

Si x est négatif, ou si x est positif et >1, la moyenne arithmétique entre les quantités a^x, b^x, ..., k^x sera égale à l'une d'elles ou à la puissance x de la moyenne entre a, b, ..., k; d'où il suit que quand ces dernières quantités ne seront pas égales, la somme $a^x+b^x+c^x+\ldots+k^x$, devenant plus grande, on aura

$$\frac{a^x+b^x+c^x+\ldots+k^x}{m}>\left(\frac{a+b+c+\ldots+k}{m}\right)^x.$$

Si l'on avait x positif et <1, on sait que la somme $a^x+b^x+\ldots+k^x$ serait la plus grande possible quand $a=b=c=\ldots=k$; d'où il suit qu'on aurait dans ce cas

$$\frac{a^x+b^x+c^x+\ldots+k^x}{m}<\left(\frac{a+b+c+\ldots+k}{m}\right)^x.$$

162. Nota. On considère souvent des moyennes arithmétiques de la forme

$$\frac{ma + nb + pc + \ldots + sk}{m + n + p + \ldots + s};$$

elles semblent au premier abord différer de celles dont nous avons parlé; mais il est facile de voir qu'elles n'en sont qu'un cas particulier, et qu'elles proviennent de ce que m des quantités données se sont trouvées égales à a, n à b, etc..., et la formule précédente représente toujours leur somme divisée par leur nombre, lorsque m, n, p,...,s, sont entiers. S'il s'en trouvait de fractionnaires, on les ramènerait immédiatement au cas précédent en multipliant les deux termes de la fraction totale par le produit des dénominateurs : on verrait alors facilement entre quelles quantités cette fraction est moyenne arithmétique.

Les mêmes considérations s'appliqueraient aux moyennes géométriques de la forme

$$\sqrt[m+n+\ldots+k]{a^m b^n c^p \ldots k^s}.$$

Détermination de certaines fonctions, d'après une de leurs propriétés caractéristiques.

163. Problème. *Trouver une fonction* $\varphi(x)$, *telle que l'on ait*

$$(1) \ldots \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y),$$

quels que soient x *et* y.

Supposant $y = x$, l'équation (1) devient

$$\varphi(2x) = 2\varphi(x).$$

Supposant ensuite $y = 2x$, elle devient

$$\varphi(3x) = \varphi(x) + \varphi(2x) = 3\varphi(x).$$

En continuant ainsi jusqu'à $y = (m-1)x$, on aura pour toute valeur entière de m,

$$\varphi(mx) = m\varphi(x).$$

Or, le premier membre ne changeant pas quand on remplace m par x et x par m, le second membre doit jouir de la même propriété. Il faut donc que la fonction $\varphi(x)$ soit d'une forme telle que l'on ait

$$m \times \varphi(x) = x \times \varphi(m); \quad \text{d'où} \quad \frac{\varphi(x)}{x} = \frac{\varphi(m)}{m}.$$

Il suit de là que $\frac{\varphi(x)}{x}$ est constant, puisque rien n'empêche de laisser m invariable, en donnant à x toutes les valeurs possibles. Désignant donc cette constante par a, on aura

$$\varphi(x) = ax.$$

Réciproquement, toute fonction de la forme ax, jouit de la propriété demandée, quelle que soit la constante a et la variable x, car on a identiquement

$$a(x+y) = ax + ay.$$

164. Problème. *Trouver une fonction telle, que l'on ait identiquement*

$$\varphi(xy) = \varphi(x) \times \varphi(y).$$

Faisant d'abord $y = x$, on aura $\varphi(x^2) = [\varphi(x)]^2$. Supposant ensuite $y = x^2$, il viendra

$$\varphi(x^3) = \varphi(x) \times \varphi(x^2) = [\varphi(x)]^3.$$

En continuant ainsi jusqu'à $y = x^{m-1}$, on obtiendra l'équation générale

$$\varphi(x^m) = [\varphi\, x)]^m.$$

Posons maintenant $x = a^y$; l'équation précédente deviendra

$$\varphi(a^{ym}) = [\varphi(a^y)]^m.$$

Le premier membre ne changeant pas, quand on remplace y par m et m par y, il en doit être de même du second; d'où l'on conclut

$$[\varphi(a^y)]^m = [\varphi(a^m)]^y.$$

Faisant $\varphi(a^m) = a^k$, il vient

$$[\varphi(x)]^m = a^{ky} = x^k; \quad \text{d'où} \quad \varphi(x) = x^{\frac{k}{m}}.$$

La fonction cherchée est donc de la forme x^n.

Réciproquement, quel que soit n, cette forme convient à la condition proposée, car on a identiquement

$$(xy)^n = x^n y^n.$$

165. Problème. *Trouver une fonction telle, que l'on ait identiquement*

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) \times \varphi(y).$$

Soit $y = x$, on trouvera $\varphi(2x) = [\varphi(x)]^2$.
Faisant successivement

$$y = 2x,\ y = 3x,\ \ldots,\ y = (m-1)x,$$

on obtiendra l'équation générale

$$\varphi(mx) = [\varphi(x)]^m.$$

Remarquant que le changement de m en x et de x en m n'altère pas le premier membre, on en conclura

$$[\varphi(x)]^m = [\varphi(m)]^x;$$

d'où, en prenant les logarithmes des deux membres dans une base quelconque,

$$m \log \varphi(x) = x \log \varphi(m);$$

ce qui donne

$$\frac{\log \varphi(x)}{x} = \frac{\log . \varphi(m)}{m}.$$

Le premier membre de l'équation est donc constant, quel que soit x, puisque m est un nombre qu'on peut laisser invariable; nommant a cette constante, on aura

$$\log \varphi(x) = ax; \quad \text{d'où} \quad \varphi(x) = b^{ax},$$

b désignant la base du système de logarithmes que l'on a choisi.

Si l'on fait $b^a = A$, il viendra

$$\varphi(x) = A^x.$$

Réciproquement, toute fonction de cette forme satisfait à la condition proposée, puisqu'on a identiquement

$$A^{x+y} = A^x \times A^y.$$

166. Problème. *Trouver une fonction telle, que l'on ait identiquement* $\varphi(xy) = \varphi(x) + \varphi(y)$.

Faisant successivement

$$y = x,\ y = 2x, \ldots,\ y = (m-1)x,$$

on parviendra à l'équation

$$\varphi(x^m) = m\varphi(x).$$

Posant $x = a^y$, il vient

$$\varphi(a^{ym}) = m\varphi(a^y).$$

Observant que y et m entrent symétriquement dans le premier membre, on obtiendra, en les substituant l'un à l'autre dans le second membre,

$$m\varphi(a^y) = y\varphi(a^m);$$

d'où

$$\frac{\varphi(a^y)}{y} = \frac{\varphi(a^m)}{m} = c;$$

c désignant une constante. Il en résulte

$$\varphi(a^y) = cy.$$

Remplaçant a^y par x, et y par $\log x$, on a

$$\varphi(x) = c\log x;$$

a étant la base du système de logarithmes.

Réciproquement, quels que soient a et c, la fonction $c\log x$ satisfait à la condition donnée, car on a toujours

$$c\log(xy) = c\log x + c\log y.$$

Problèmes divers.

167. PROBLÈME. *On a partagé une certaine somme entre m personnes ; la première a reçu une quantité connue* a, *plus la* $n^{ième}$ *partie du reste : la seconde a reçu* 2a, *plus la* $n^{ième}$ *partie de ce qui reste, après avoir prélevé ces* 2a *outre la première part : la troisième a reçu* 3a, *plus la* $n^{ième}$ *partie du nouveau reste ; et ainsi de suite. On demande la valeur de la somme en question, et la condition pour que toutes les parts soient égales, et que la somme se trouve entièrement epuisée.*

Soit x la somme cherchée, et $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_m$, les différentes parts ; d'après la loi donnée pour la formation, on aura, pour deux parts consécutives quelconques, l'une du rang p, l'autre du rang $p+1$, les deux expressions suivantes :

$$y_p = pa + \frac{x - pa - y_1 - y_2 - y_3 - \ldots - y_{p-1}}{n},$$

$$y_{p+1} = (p+1)a + \frac{x - (p+1)a - y_1 - y_2 - y_3 \ldots - y_p}{n}.$$

Retranchant la première de la seconde, on trouve pour différence, $a - \frac{a + y_p}{n}$. Egalant cette différence à zéro, il vient $y_p = (n-1)a$; d'où l'on voit que la condition nécessaire et suffisante pour l'égalité de toutes ces parts, est qu'elles aient chacune pour valeur $(n-1)a$. Mais pour que la somme x soit entièrement épuisée après la $m^{ième}$ part, il faut que celle-ci se réduise à ma ; car s'il restait encore quelque chose après avoir prélevé ma, on n'en prendrait que la $n^{ième}$ partie, et il y aurait encore un reste après la $m^{ième}$ part. Il faut donc, pour satisfaire à la fois à cette condition et à celle de l'égalité de toutes les parts, que l'on ait $(n-1)a = ma$, ou $n - 1 = m$. Quand cette condition sera remplie, on aura facilement la valeur de x, en multipliant une des parts par m ; ce qui donnera $x = am^2$.

168. PROBLÈME. *Trouver la valeur d'une somme que l'on partage entre* m *personnes, de manière que la première ait* a, *plus la*

$n^{ième}$ *partie du reste ; la seconde* 2a *, plus la* $n^{ième}$ *partie du reste, et ainsi de suite, sans que l'on assigne aucune relation entre les différentes parts.*

Soit encore x la somme cherchée et $y_1, y_2, \ldots, y_m$, ses diverses parties. Pour connaître la manière dont les parts peuvent se déduire les unes des autres, prenons en deux consécutives quelconques, y_p, y_{p+1} ; nous aurons pour leurs expressions

$$y_p = pa + \frac{x - pa - y_1 - y_2 - y_3 - \ldots - y_{p-1}}{n},$$

$$y_{p+1} = (p+1)a + \frac{x - (p+1)a - y_1 - y_2 - y_3 - \ldots - y_p}{n}.$$

Prenant leur différence, il viendra

$$y_{p+1} - y_p = a - \frac{a + y_p}{n};$$

d'où $$ny_{p+1} - ny_p = na - a - y_p;$$

ce qui donne $$y_p = \left(\frac{n}{n-1}\right) y_{p+1} - a.$$

Partons maintenant de la dernière part, qui devra être ma pour que la somme soit entièrement épuisée, et exprimons toutes les parts précédentes, au moyen de la loi que nous venons d'observer entre deux parts consécutives quelconques ; il suffira ensuite d'en faire la somme, pour connaître la valeur de x. Représentant, pour plus de commodité, $\frac{n}{n-1}$ par k, on aura successivement

$$y_m = ma,$$
$$y_{m-1} = ky_m - a = kma - a,$$
$$y_{m-2} = ky_{m-1} - a = k^2ma - ka - a,$$
$$y_{m-3} = ky_{m-2} - a = k^3ma - k^2a - ka - a,$$
$$\vdots$$
$$y_{m-(m-1)} = y_1 = k^{m-1}ma - k^{m-2}a - k^{m-3}a - k^{m-4}a - \ldots - ka - a.$$

Ces valeurs de $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_m$ peuvent être mises sous la

forme suivante :

$$y_1 = k^{m-1}ma - a\left(\frac{k^{m-1}-1}{k-1}\right),$$

$$y_2 = k^{m-2}ma - a\left(\frac{k^{m-2}-1}{k-1}\right),$$

$$\vdots$$

$$y_{m-2} = k^2ma \quad - a\left(\frac{k^2-1}{k-1}\right),$$

$$y_{m-1} = kma \quad - a,$$

$$y_m = ma.$$

Faisant leur somme, on aura pour x la valeur suivante :

$$x = ma(1+k+k^2+\ldots+k^{m-1}) - a - a\left(\frac{k^2+k^3+\ldots+k^{m-1}}{k-1}\right) + \frac{(m-2)a}{k-1}.$$

Remarquant que $1+k+k^2+\ldots+k^{m-1} = \frac{k^m-1}{k-1}$, et que $k^2+k^3+\ldots+k^{m-1} = k^2\left(\frac{k^{m-2}-1}{k-1}\right)$, on aura

$$x = ma\left(\frac{k^m-1}{k-1}\right) - a - \frac{ak^2(k^{m-2}-1)}{(k-1)^2} + \frac{(m-2)a}{k-1}.$$

Remplaçant k par sa valeur $\frac{n}{n-1}$, il vient en réduisant

$$x = a\left\{\frac{m\left(\frac{n}{n-1}\right)^{m+1} - (m+1)\left(\frac{n}{n-1}\right)^m + 1}{\left(\frac{1}{n-1}\right)^2}\right\}.$$

Telle est la formule de la somme cherchée, quels que soient m et n.

Si l'on demandait que toutes les parts fussent égales, il faudrait, d'après le problème précédent, que l'on eût $n-1=m$, et la formule ci-dessus se réduirait à $x = am^2$, comme nous l'avions déjà trouvée dans ce cas particulier.

169. Les intérêts d'une somme se cumulant à chaque instant, il est évident que si l'on doit un intérêt R à la fin d'un an, on aurait du désavantage à payer $\frac{R}{2}$ au bout de 6 mois, et $\frac{R}{2}$ à la fin de l'année, parce que le premier paiement que l'on ferait au milieu de l'année, porterait intérêt pendant les 6 derniers mois, et l'on se trouverait avoir payé réellement plus que R au bout de l'année. Si, au lieu de partager l'intérêt total en deux paiemens, on le partageait en trois, en quatre, et ainsi de suite indéfiniment, le prêteur aurait de plus en plus d'avantage à cette division du paiement, et l'on peut se proposer de calculer la limite de cet avantage en supposant que le nombre des paiemens tende vers l'infini; c'est ce qu'on résoudra de la manière suivante:

Problème. *Trouver la limite de ce que devient un capital* a^{fr} *après* n *années, en supposant que l'intérêt de* 1^{fr} *par an est* r^{fr}*, que l'année est divisée en* δ *instans égaux, que l'intérêt de* 1^{fr} *pendant un instant quelconque est* $\frac{r^{\text{fr}}}{\delta}$*, que l'intérêt s'ajoute à la fin de chaque instant au capital pour porter intérêt pendant l'instant suivant, et que le nombre* δ *tend vers l'infini.*

L'intérêt de 1^{fr} pendant un instant étant $\frac{r^{\text{fr}}}{\delta}$, l'intérêt du capital a^{fr} pendant le 1er instant est $\frac{ar^{\text{fr}}}{\delta}$; de sorte qu'à la fin du 1er instant, ce capital vaut $a^{\text{fr}}+\frac{ar^{\text{fr}}}{\delta}$ ou $a^{\text{fr}}\times\left(1+\frac{r}{\delta}\right)$. Par conséquent, le capital a^{fr} vaudra, à la fin du 2e instant $a^{\text{fr}}\times\left(1+\frac{r}{\delta}\right)^2$, à la fin du 3e instant $a^{\text{fr}}\times\left(1+\frac{r}{\delta}\right)^3$, ..., et à la fin de la $n^{\text{ième}}$ année ou de δn instans, le capital a^{fr} vaudra $a^{\text{fr}}\times\left(1+\frac{r}{\delta}\right)^{\delta n}$. Désignant cette dernière valeur par x, on aura

$$x=a\left(1+\frac{r}{\delta}\right)^{n}.$$

Pour obtenir la valeur de x correspondante à δ infini, on

développera d'abord la puissance indiquée, ce qui donnera

$$x = a\left\{1 + \delta n \frac{r}{\delta} + \frac{\delta n(\delta n - 1)}{2}\left(\frac{r}{\delta}\right)^2 + \text{etc.}\right\}.$$

Cette valeur de x revient à

$$x = a\left\{1 + nr + \frac{n}{2}\left(n - \frac{1}{\delta}\right)r^2 + \frac{n}{2.3}\left(n - \frac{1}{\delta}\right)\left(n - \frac{2}{\delta}\right)r^3 + \text{etc.}\right\}.$$

Supposant δ infini, les fractions $\frac{1}{\delta}$, $\frac{2}{\delta}$, $\frac{3}{\delta}$, etc., se réduisent à zéro, de sorte que

$$x = a\left(1 + nr + \frac{n^2r^2}{2} + \frac{n^3r^3}{2.3} + \frac{n^4r^4}{2.3.4} + \text{etc.}\right).$$

Or, d'après la formule (3) (page 126), la série qui multiplie a exprime le développement de e^{nr}. On a donc $x = ae^{nr}$.

170. Problème. *On propose de démontrer qu'il n'existe que cinq polyèdres réguliers.*

Soient, x le nombre des côtés de l'une des faces d'un polièdre régulier, y le nombre des angles plans qui forment chaque angle solide de ce polyèdre, et z le nombre de ses faces. Si l'on inscrit une sphère dans le polyèdre, et si l'on mène des plans par le centre de la sphère et par les différens côtés des faces du polyèdre, ces plans diviseront la surface de la sphère en z poligones sphériques égaux qui auront chacun x côtés; il y aura y angles des polygones sphériques qui concourront en un même point; et comme la somme de ces angles est égale à 4 angles droits, chacun d'eux vaudra $\frac{4}{y}$ d'un angle droit; les x angles intérieurs de chaque polygone sphérique, vaudront donc $\frac{4x}{y}$ d'un angle droit. Or, en prenant l'angle droit pour unité d'angle, et le triangle sphérique *tri-rectangle* pour unité de surface, *la surface de tout polygone sphérique a pour mesure, la somme de ses angles intérieurs, moins le produit de deux angles droits par le nombre des côtés du polygone diminué de 2,*

et la surface de la sphère est égale à 8 (*); la surface de chaque polygone sphérique est donc égale à $\frac{4x}{y} - 2(x-2)$, ou à $\frac{4x}{y} - 2x + 4$; et comme la somme des surfaces de ces z polygones forme la surface totale de la sphère, on a

$$\left(\frac{4x}{y} - 2x + 4\right)z = 8; \quad \text{d'où} \quad (1)\ldots z = \frac{4y}{2x-(x-2)y}.$$

Les valeurs entières positives de x, y, z, qui satisferont à cette équation, détermineront les polygones réguliers demandés. Cherchons ces valeurs; x et y étant positifs, pour que z soit positif, il faut et il suffit que

$$(x-2)y < 2x; \quad \text{d'où} \quad y < \frac{2x}{x-2}.$$

Or, il faut au moins trois côtés pour former une face, et trois angles plans pour composer un angle solide, donc $x > 2$ et $y > 2$. Les deux limites de y exigent que

$$\frac{2x}{x-2} > 3; \quad \text{d'où} \quad x < 6.$$

On ne doit donc assigner à x que les valeurs 3, 4, 5; les valeurs correspondantes de z, déduites de l'équation (1), sont

$$\frac{4y}{6-y}, \quad \frac{2y}{4-y} \quad \text{et} \quad \frac{4y}{10-3y}.$$

Par conséquent : 1°. On ne peut combiner avec $x=3$, que $y=3$, $y=4$, $y=5$; les valeurs correspondantes de z sont 4, 8, 20; ce qui détermine le *tétraèdre*, l'*octaèdre*, et l'*icosaèdre*; toutes les faces de ces polyèdres sont des triangles équilatéraux.

2°. Avec $x=4$, on ne peut combiner que $y=3$; ce qui donne $z=6$. Cela fournit le *cube* dont les six faces sont des carrés.

(*) *Voyez* la 4e proposition du 7e livre de la *Géométrie* de M. *Legendre*.

3°. Enfin, lorsque $x=5$, le dénominateur $10-3y$ devant être positif, il faut que $y=3$; d'où $z=12$. Cela détermine le *dodécaèdre*, dont les douze faces sont des pentagones réguliers.

Il n'existe donc que cinq polyèdres réguliers, savoir : le *tétraèdre*, le *cube*, l'*octaèdre*, l'*icosaèdre* et le *dodécaèdre*.

171. PROBLÈME. *Déterminer la somme des puissances semblables des termes d'une progression arithmétique.*

Soient $a, b, c, d, \ldots, k, l$, les termes de la progression, et δ la *raison* ; on a

$$b=a+\delta,\quad c=b+\delta,\quad d=c+\delta,\ldots,\quad l=k+\delta;$$

d'où

$$b^m=a^m+ma^{m-1}\delta+\frac{1}{2}m(m-1)a^{m-2}\delta^2+\frac{1}{2}m(m-1)(m-2)a^{m-3}\delta^3+\text{etc.},$$

$$c^m=b^m+mb^{m-1}\delta+\frac{1}{2}m(m-1)b^{m-2}\delta^2+\frac{1}{6}m(m-1)(m-2)b^{m-3}\delta^3+\text{etc.},$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$l^m=k^m+mk^{m-1}\delta+\frac{1}{2}m(m-1)k^{m-2}\delta^2+\frac{1}{6}m(m-1)(m-2)k^{m-3}\delta^3+\text{etc.}$$

Ajoutant ces équations membre à membre, et désignant par S_m, S_{m-1}, S_{m-2}, etc., les sommes des puissances m, $m-1$, $m-2$, etc., des termes de la progression, on trouve

$$S_m-a^m=S_m-l^m+m\delta(S_{m-1}-l^{m-1})+\frac{m}{2}(m-1)\delta^2(S_{m-2}-l^{m-2})+\text{etc.};$$

d'où

$$S_{m-1}=l^{m-1}+\frac{1}{m\delta}(l^m-a^m)-\frac{(m-1)\delta}{2}(S_{m-2}-l^{m-2})-\text{etc.}$$

Cette dernière formule fait dépendre S_{m-1} des puissances inférieures $S_{m-2}, S_{m-3}, \ldots, S_2, S_1, S_0$.

EXEMPLE. Pour obtenir la somme des $m-1^{ièmes}$ puissances des n nombres naturels $1, 2, 3, \ldots, n$, on fait

$$a=1,\quad \delta=1,\quad l=n;$$

ce qui conduit à

$$S_{m-1}=\frac{(n^m-1)}{m}+n^{m-1}-\left(\frac{m-1}{2}\right)(S_{m-2}-n^{m-2})-\text{etc.}$$

Donnant à m les valeurs 1, 2, 3, 4, etc., on trouve

$$S_0 = n, S_1 = \frac{n(n+1)}{2}, S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2 \cdot 3}, S_3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \text{etc.}$$

172. Problème. *On demande le nombre de boulets contenus dans une* pile *dont la base est un triangle équilatéral, ou un rectangle, ou un carré; tous les boulets se touchent et sont de même diamètre.*

1°. Lorsque la *pile* est *triangulaire* (*fig.* 101 *bis*), en la divisant en tranches horizontales à partir du sommet S, on obtient les tranches représentées (*fig.* 102 *bis*) (*); la 1re tranche contient un seul boulet, la 2e en renferme $1+2$ ou 3, la 3e en contient $1+2+3$ ou 6, ..., et en général, la $n^{ième}$ tranche est composée de $1+2+\ldots+n$ boulets. Les nombres 3, 6, etc. ont reçu le nom de *nombres triangulaires*, parce qu'ils expriment combien il faut prendre de cercles égaux et tangens pour qu'on puisse disposer ces cercles en forme de triangle (*fig.* 102 *bis*).

Le nombre des boulets de la pile SABC (*fig.* 101 *bis*), étant $1+3+6+10+15$ ou 35, on formerait des piles triangulaires en prenant $1+3$, ou $1+3+6$, ou $1+3+6+10$ boulets. Les nombres $1+3$, $1+3+6$, etc., s'appellent des *nombres pyramidaux*, parce qu'ils expriment le nombre de sphères égales et tangentes qu'on peut disposer en *pyramide triangulaire*. Les nombres de boulets contenus dans ces piles sont faciles à déterminer. En effet:

la 1re tranche contient ..	1 boulet,
la 2e en contient	$1+2$,
la 3e en contient	$1+2+3$,
⋮	⋮
la $(n-1)^{ième}$ en contient	$1+2+3+\ldots+(n-1)$.

Ajoutant les nombres contenus dans chaque colonne verticale

(*) La figure (102 *bis*) représente les cinq sections horizontales faites dans la pyramide SABC (*fig.* 101 *bis*) par des plans menés par les centres des boulets.

et désignant par X_{n-1} le nombre total de boulets des $n-1$ tranches, on voit que

$$X_{n-1}=(n-1)\text{fois }1+(n-2)\text{ fois }2+(n-3)\text{ fois }3+\ldots+\{n-(n-1)\}\text{ fois }(n-1)$$
$$=n\{1+2+3+\ldots(n-1)\}-\{1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2\}.$$

Lorsqu'on prend une tranche de plus, le nombre total des boulets des n tranches est

$$X_n=(n+1)(1+2+3+\ldots+n)-(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2).$$

Substituant pour $1+2+3+\ldots+n$ et $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$, leurs valeurs $\frac{1}{2}n(n+1)$, $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, on trouve

$$(1)\ldots X_n=\tfrac{1}{6}n(n+1)(n+2).$$

Le nombre n des tranches est égal au nombre de boulets du côté AB de la pile SABC. Dans la *figure* 101 *bis*, on a $n=5$; la formule (1) donne $X_5=35$; la pile est formée des cinq tranches de boulets indiquées (*fig.* 102 *bis*).

2°. Pour évaluer le nombre X des boulets contenus dans la *pile tronquée* ABC*abc* (*fig.* 101 *bis*), on désigne par m le nombre des boulets du côté ab de la tranche supérieure abc; le côté $\alpha\text{Є}$ de la tranche immédiatement supérieure renfermant $m-1$ boulets, on obtient le nombre des boulets de la pile $S\alpha\text{Є}\gamma$ en remplaçant n par $m-1$ dans la formule (1); la différence entre les nombres de boulets des piles SABC, $S\alpha\text{Є}\gamma$, exprimant X, on trouve

$$(2)\ldots X=\tfrac{1}{6}\{n(n+1)(n+2)-(m-1)m(m+1)\}.$$

n et m sont les nombres de boulets des côtés AB, ab, des deux bases du tronc. On obtient le nombre 31 des boulets de la pile tronquée ABC*abc* (*fig.* 101 *bis*), en faisant $n=5$, $m=3$, dans la formule (2); cette pile est composée des trois dernières tranches de la *fig.* 102 *bis*, et ces tranches contiennent $6+10+15$ ou 31 boulets.

3°. Quand *la pile a pour base un rectangle* ABCD (*fig.* 103 *bis*), les tranches horizontales sont des rectangles, et la pile entière

est terminée par une *file* EF de boulets; les faces latérales sont deux *triangles équilatéraux* EAD, FBC, et deux *trapèzes* EFBA, EFCD. Si la *file* supérieure EF contient $\delta+1$ boulets, la 2e tranche $a'b'c'd'$ sera un rectangle dont les côtés $a'b'$, $b'c'$, contiendront respectivement $\delta+2$ boulets et 2 boulets; il y aura donc $(\delta+2)\times 2$ boulets dans cette tranche; la 3e en contiendra $(\delta+3)\times 3$, et ainsi de suite. Désignant par Y_n le nombre total des boulets des n tranches qui composent la pile entière EFABCD, le côté BC renfermera n boulets, le côté AB en contiendra $\delta+n$, et on aura

$$Y_n=(\delta+1)\times 1+(\delta+2)\times 2+(\delta+3)\times 3+\ldots+(\delta+n)\times n$$
$$=\delta(1+2+3+\ldots+n)+(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2).$$

Remplaçant $1+2+3+\ldots+n$ et $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$, par leurs valeurs $\frac{1}{2}n(n+1)$, $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, il vient

$$Y_n=\tfrac{1}{6}n(n+1)\ (3\delta+2n+1).$$

Soit $\delta+n=m$, on trouve

$$(3)\ldots\ Y_n=\tfrac{1}{6}n(n+1)\ (3m-n+1),$$

n et m sont les nombres de boulets des côtés BC, BA de la base de la pile. Supposant $n=5$, $m=8$, on trouve que la pile EFABCD contient 100 boulets.

4°. Enfin, pour évaluer le nombre Y des boulets de la pile tronquée ABCD$abcd$ (*fig.* 103 *bis*), il suffit de prendre la différence entre les nombres de boulets des piles EFABCD, EF$a'b'c'd'$. Désignant par n' et m' les nombres de boulets des côtés bc, ba de la base supérieure du tronc, les nombres de boulets des côtés $b'c'$, $b'a'$, de la base de la pile EF$a'b'c'd'$, seront $n'-1$ et $m'-1$; on obtiendra donc le nombre des boulets de cette petite pile en remplaçant dans la formule (3), n et m par $n'-1$ et $m'-1$; on en déduit

$$(4)\ldots\ Y=\frac{1}{6}\{n(n+1)(3m-n+1)-(n'-1)n'(3m'-n'-1)\}.$$

n, m, n' et m', sont les nombres de boulets des côtés BC,

BA, *bc*, *ba*, des deux bases de la pile tronquée. Or........ $AB = \delta + n = m$, $ab = \delta + n' = m'$; donc $m - n = m' - n'$; cette relation donne le moyen d'éliminer une des quantités m', n', m, n.

Pour trouver combien la pile tronquée *abcd*ABCD (*fig.* 103 *bis*), contient de boulets, on fait $m = 8$, $n = 5$, $m' = 6$, $n' = 3$, dans la formule (4); ce qui donne

$$Y = 100 - 14 = 86.$$

Remarque. Lorsque la base ABCD (*fig.* 104 *bis*) est un carré; $m = n$, $m' = n'$; la pile SABCD est terminée par un seul boulet, car $\delta = m - n = 0$, et la file EF (*fig.* 103 *bis*) contient $\delta + 1$ boulets; les formules (3), (4) deviennent

$$Y_n = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1), \quad Y = \frac{1}{6}\left\{n(n+1)(2n+1) - (n'-1)n'(2n'-1)\right\}.$$

173. Théorème. *Le produit de* n *nombres entiers consécutifs quelconques est divisible par le produit des nombres* 1, 2, 3, 4,...n. En effet, l'identité

$$\frac{(p+1)(p+2)\ldots(p+n-1)(p+n)}{1 \; . \; 2 \; \ldots \; (n-1) \quad n} = \left(\frac{n+p}{n}\right) \times \frac{(p+1)(p+2)\ldots(p+n-1)}{1 \; . \; 2 \; \ldots \; (n-1)}$$
$$= \left(1 + \frac{p}{n}\right) \times \frac{(p+1)(p+2)\ldots(p+n-1)}{1 \; . \; 2 \; \ldots \; (n-1)},$$

donne

$$\frac{(p+1)(p+2)\ldots(p+n-1)(p+n)}{1 \; . \; 2 \; \ldots \; (n-1) \quad n} = \frac{(p+1)(p+2)\ldots(p+n-1)}{1 \; . \; 2 \; \ldots \; (n-1)} + \frac{p(p+1)\ldots(p+n-1)}{1 \; . \; 2 \; \ldots \quad n}.$$

Cette dernière démontre que si le produit de $n-1$ nombres entiers consécutifs $p+1, p+2, \ldots, p+n-1$, est divisible par le produit des $n-1$ nombres entiers $1, 2, \ldots, n-1$, le reste de la division de $(p+1)(p+2)\ldots(p+n)$ par $1 \times 2 \times \ldots \times n$ sera le même que celui de la division de $p(p+1)\ldots(p+n-1)$ par $1 \times 2 \times \ldots \times n$; c'est-à-dire que si la propriété énoncée convient à $n-1$ facteurs, le *reste* de la division du produit de n nombres entiers consécutifs par $1 \times 2 \ldots \times n$, ne changera pas quand chaque facteur diminuera d'une unité; le *reste* de la division ne changera donc pas,

lorsqu'on diminuera de p unités chacun des n facteurs $p+1$, $p+2, \ldots, p+n$; le produit $1 \times 2 \times \ldots \times n$ de ces nouveaux facteurs étant divisible par $1 \times 2 \times \ldots \times n$, on voit que si la propriété énoncée est vraie pour $n-1$ facteurs, elle le sera également pour n facteurs; or, elle convient à deux facteurs, car l'un de ces facteurs étant toujours un nombre pair, leur produit est divisible par 1×2; le principe est donc démontré.

Application de la Théorie des Progressions à la Solution de plusieurs questions qui s'y rapportent.

174. Problème. *Deux voyageurs partent d'un même point et marchent, l'un pendant 8 heures, l'autre pendant 9 heures. Le 1er a parcouru un kilomètre pendant la 1re heure, et $0^{km},36$ pendant la dernière; sa vitesse est telle, que l'espace parcouru diminue par heure d'une quantité constante. Le 2e voyageur borne sa carrière dans l'étendue d'un chemin planté de 51 arbres, à $1^{m},2$ de distance l'un de l'autre. Le 1er de ces arbres a servi de point de départ commun aux deux voyageurs, et le second voyageur marchant avec une vitesse constante, se dirige de la manière suivante : il va jusqu'au 2e arbre et revient au point de départ; il parvient de là au 3e arbre, puis revient de nouveau au 1er; il arrive ainsi successivement à chaque arbre, et s'arrête enfin quand il est de retour au but d'où il est parti. On demande lequel des deux voyageurs a parcouru le plus de distance, et quel eût été le rapport de leurs vitesses, si le premier voyageur eût fait sa route d'un mouvement uniforme.*

On connaîtra tout le chemin parcouru par le 1er voyageur, en cherchant la somme des termes d'une progression arithmétique, dont le 1er est un kilomètre, le dernier $0^{km},36$ et dont le nombre des termes est 8; la formule connue conduit pour l'expression de cette somme au nombre $5^{km},44$ ou 5440 mètres; telle est l'étendue de la route du premier voyageur.

La route totale du 2e voyageur se détermine avec la même facilité. En effet, ce voyageur va au 2e arbre et revient au 1er;

il parcourt donc 2 fois $1^m,2$ ou $2^m,4$. Il parcourt ensuite 2 fois la distance du 1er arbre au 3e, c'est-à-dire $2^m,4$ plus $2^m,4$, et comme l'espace qu'il parcourt augmente à chaque voyage, du double de la distance entre deux arbres, on voit que la route totale du 2e voyageur est exprimée par la somme des termes d'une progression arithmétique, dont le 1er terme est $2^m,4$, dont la *raison* est $2^m,4$, et dont le nombre des termes est 50. Calculant cette somme, on trouve que le second voyageur a parcouru 3060 mètres en 9 heures; il parcourrait donc par heure le 9e de 3060^m, ou 340^m; mais le 1er voyageur a parcouru en 8 heures 5440^m; conséquemment, s'il eût marché avec une vitesse constante, il eût parcouru en une heure le 8e de 5440^m, ou 680 mètres. La vitesse du 1er voyageur est donc à celle du 2e, comme 680 est à 340, ou comme 2 est à 1. La vitesse uniforme du 2e voyageur est donc double de celle du 1er. Les espaces parcourus par les deux voyageurs étant 5440^m et 3060^m, on voit que le 1er voyageur a parcouru 2380 mètres de plus que le second.

175. Problème. *Une pièce d'artillerie a reçu une charge et un degré d'inclinaison tels, que le boulet acquiert, en sortant, une vitesse égale à celle que conserverait un corps, ayant tombé librement de 103684 décimètres de hauteur, si après avoir parcouru cet espace, l'action de la pesanteur venait à cesser d'agir sur lui, et qu'il continuât de se mouvoir uniformément. On suppose que le boulet n'éprouvant de la part de l'air aucune résistance, se dirige avec une vitesse uniforme, et qu'il met 5 secondes pour parvenir à son terme. Un courrier marchant dans la direction du boulet, part d'un point distant du lieu de la pièce d'artillerie de 1246 mètres, et parcourt 16 mètres dans la 1re seconde, 32 mètres dans la 2e, 64^m dans la 3e, et ainsi de suite en doublant. Il s'arrête au bout de 6 secondes, et l'on met alors le feu à la pièce. On demande si le boulet peut atteindre le courrier.*

Pour résoudre ce problème, je rappellerai plusieurs principes de Physique dont on aura besoin; savoir :

1°. Qu'un corps abandonné à l'action de la pesanteur, dans

un milieu non résistant, parcourt 49 décimètres pendant la 1[re] seconde de sa chute.

« 2°. Que lorsqu'un corps pesant est tombé pendant un » nombre quelconque de secondes, la vitesse qu'il a acquise est » telle, que si la pesanteur cessait d'agir, il décrirait par chaque » seconde autant de fois 98 décimètres qu'il s'est écoulé de » secondes.

» 3°. Que l'accélération acquise, pendant la chute, par les » corps soumis à l'action de la pesanteur, est exprimée par la » progression des nombres impairs. 1, 3, 5, 7, etc.... »

Pour appliquer ces principes à la détermination de la longueur du chemin que doit franchir le boulet en 5 secondes, je commencerai par chercher combien il faut de secondes à un corps pour tomber d'une hauteur égale à 103684 décimètres, et le 3[e] des principes ci-dessus, fournira l'équation

$$103684 = 49(1+3+5+7+\ldots \text{etc.}), \text{ ou } 2116 = 1+3+5+\text{etc.}$$

La progression arithmétique qui forme le second membre, contient autant de termes que le corps dont il s'agit a mis de secondes dans sa chute; il est donc utile de chercher quel est le nombre des termes de cette progression; en représentant ce nombre par n, l'équation précédente peut recevoir cette forme

$$2116 = \frac{n}{2}\left\{2 + 2(n-1)\right\} = n^2.$$

L'extraction de la racine carrée conduit à $n=46$; ainsi le corps a employé 46 secondes pour descendre de 103684 décimètres.

D'après les conditions du problème, et en vertu du 2[e] principe rapporté, la vitesse initiale du boulet pendant la 1[re] seconde, sera $46 \times 9^m,8 = 450^m,8$; et l'espace total qu'il aura parcouru pendant 5 secondes, sera 5 fois $450^m,8$ ou 2254^m.

Il reste maintenant à déterminer le chemin fait par le courrier pendant 6 secondes de marche; d'après l'énoncé, ce chemin est exprimé par la somme des termes d'une progression géométrique dont le 1[er] terme est 16 mètres, dont la *raison* est 2,

et dont le nombre des termes est 6. En calculant cette somme, on trouve 1008 mètres. Si l'on ajoute à ce résultat, le nombre $12{,}46^m$ qui exprime la distance du point de départ du courrier à la pièce d'artillerie, on aura pour somme 2254 mètres.

On voit donc que le courrier ne peut pas être atteint par le boulet, car à l'instant où l'on tire la pièce, le courier est déjà arrivé au point où le boulet doit s'arrêter.

176. Problème. *Trois mobiles partent en même temps d'un même point d'une circonférence ; ils la parcourent dans le même sens avec des vitesses constantes*, v', v'', v''' ; *la longueur de la circonférence est* c. *Il s'agit de trouver les rencontres de ces mobiles deux à deux, et trois à trois. On suppose* $v'' > v'$ *et* $v''' > v''$.

On prendra l'heure pour unité de temps ; de sorte que les nombres d'unités d'espace, parcourues en une heure par les mobiles, seront respectivement v', v'' et v'''. Pour que deux mobiles se rencontrent, il suffit et il faut que la distance parcourue par l'un de ces mobiles, soit égale à celle que l'autre mobile a parcourue pendant le même temps, augmentée d'un nombre exact de circonférences. Cela posé : si après y heures de marche, les deux premiers mobiles se trouvent sur un même point de la circonférence, les nombres d'unités d'espaces qu'ils auront parcourues seront $v'y$, $v''y$, et n désignant un nombre entier positif quelconque, on aura

$$v''y = v'y + nc;\quad \text{d'où}\quad (1)\ldots y = \frac{nc}{v'' - v'}.$$

Donnant successivement à n les valeurs 1, 2, 3, 4, etc., les valeurs correspondantes de y exprimeront dans combien d'unités de temps le 2e mobile rencontrera le 1er mobile, pour la 1re fois, ou pour la 2e fois, etc.

Par une raison semblable, le 3e mobile aura rencontré n' fois le 1er mobile, dans $\frac{n'c}{v''' - v'}$ heures, et le 3e mobile aura rencontré n'' fois le 2e mobile, dans $\frac{n''c}{v''' - v''}$ heures ; désignant ces

nombres d'heures, par z et t, on aura

$$(1) \ldots y = \frac{nc}{v'' - v'},\ (2) \ldots z = \frac{n'c}{v''' - v'},\ (3) \ldots t = \frac{n''c}{v'' - v'''}.$$

Pour obtenir les rencontres des mobiles deux à deux, il suffit de donner successivement aux indéterminées n, n', n'', les valeurs 1, 2, 3, 4, etc.

Les rencontres des mobiles trois à trois, se déduisent de ce qui précède. En effet, le 2e mobile rencontre le 1er après y heures, et le 3e rencontre le premier après z heures. Par conséquent, pour que les trois mobiles se trouvent sur un même point de la circonférence, il suffit et il faut que les valeurs (1), (2) de y et z, soient égales. La question est ainsi réduite à calculer les valeurs entières positives des indéterminées n, n', qui satisfont à l'équation

$$\frac{nc}{v'' - v'} = \frac{n'c}{v''' - v'};\ \text{d'où}\ (4) \ldots \frac{n}{n'} = \frac{v'' - v'}{v''' - v'}.$$

Lorsque les valeurs numériques des vitesses v', v'', v''', seront données, on réduira la fraction $\frac{v'' - v'}{v''' - v'}$ à sa plus simple expression $\frac{\alpha}{6}$; α et β seront des nombres entiers positifs, et toutes les solutions entières positives de l'équation (4) se déduiront des formules $n = \alpha e$, $n' = 6e$, en donnant successivement à e les valeurs 1, 2, 3, etc. Le nombre d'heures écoulées depuis l'instant du départ des trois mobiles jusqu'au moment où ils se retrouvent sur un même point de la circonférence, est exprimé par l'une quelconque des quantités égales $\frac{nc}{v'' - v'}$, $\frac{n'c}{v''' - v'}$; désignant ce nombre d'heures par x, et remplaçant les indéterminées n, n', par leurs valeurs générales αe, $6e$, on aura

$$(5) \ldots x = \frac{\alpha ce}{v'' - v'} = \frac{6ce}{v''' - v'}.$$

Les mobiles se seront donc rencontrés e fois, trois à trois,

dans $\frac{\alpha ce}{v''-v'}$ heures; les valeurs correspondantes de y et z étant $y=\frac{\alpha ec}{v''-v'}$, $z=\frac{\mathit{6}ec}{v'''-v'}$, on voit que pendant ce temps, le 2e mobile aura rencontré αe fois le 1er, et le 3e aura rencontré $\mathit{6}e$ fois le 1er. Il est facile d'en conclure que le 3e mobile aura rencontré $(\mathit{6}-\alpha)e$ fois le 2e, car les relations (5) donnent

$$(v''-v')x=\alpha ce,\quad (v'''-v')x=\mathit{6}ce;\quad \text{d'où}$$

$$(v'''-v'')\,x=(\mathit{6}-\alpha)\,ec,\quad x=\frac{(\mathit{6}-\alpha)\,ec}{v'''-v''},$$

et la comparaison de cette valeur de x avec la valeur (3) de t, démontre la propriété énoncée. Ainsi, après $\frac{\alpha ce}{v''-v'}$ heures, le 2e mobile aura rencontré αe fois le 1er mobile, le 3e mobile aura rencontré $\mathit{6}e$ fois le 1er mobile, le 3e mobile aura rencontré $(\mathit{6}-\alpha)e$ fois le 2e mobile, et les mobiles se seront rencontrés e fois trois à trois; e désigne un nombre entier positif quelconque; $\frac{\alpha}{\mathit{6}}$ est la valeur de la fraction $\frac{v''-v'}{v'''-v'}$, réduite à sa plus simple expression, et on a

$$\frac{\alpha ce}{v''-v'}=\frac{\mathit{6}ce}{v'''-v'}=\frac{(\mathit{6}-\alpha)ec}{v'''-v''}.$$

Exemple. *Une montre marque les heures, les minutes et les secondes; les trois aiguilles sont sur la douzième heure; il s'agit de trouver les rencontres deux à deux et trois à trois de ces aiguilles.* Le cadran est divisé en 60 parties égales; pendant une heure, les aiguilles parcourent respectivement 5, 60 et 3600 de ces divisions; on a donc

$$v'=5,\ v''=60,\ v'''=3600,\ c=60;\quad \text{d'où}$$

$$\frac{v''-v'}{v'''-v'}=\frac{55}{3595}=\frac{11}{719}=\frac{\alpha}{\mathit{6}},\ \alpha=11,\ \mathit{6}=719,\ \frac{c\alpha}{v''-v'}=12.$$

Ainsi, la première rencontre des trois aiguilles aura lieu

dans 12 heures ; l'aiguille des minutes aura rencontré 11 fois celle des heures, l'aiguille des secondes aura rencontré 719 fois celles des heures, et l'aiguille des minutes aura rencontré 708 fois celle des secondes.

177. PROBLÈME. *Bacchus trouve Sylène endormi près d'un tonneau plein de vin, et boit pendant les trois cinquièmes du temps que Sylène aurait employé à vider le tonneau. Sylène s'éveille et boit le reste du vin. Si Bacchus et Sylène eussent bu ensemble, le tonneau eût été vidé six heures plus tôt, et Bacchus n'aurait bu que les deux tiers de ce qu'il a laissé à Sylène. On demande combien il faudrait d'heures à chacun d'eux en particulier, pour vider le tonneau.*

D'après cet énoncé :

1°. Si l'on diminue de six heures, le temps employé par Bacchus et Sylène pour vider le tonneau lorsqu'ils boivent successivement, le reste doit être égal au temps qu'ils mettraient à vider ensemble le tonneau.

2°. Si Bacchus et Sylène eussent bu ensemble, la quantité de vin bue par Bacchus eût été égale aux deux tiers de ce que Bacchus a laissé à Sylène.

On obtiendra donc les deux équations du problème, en calculant les quatre quantités qui entrent dans ces deux conditions. On supposera que le tonneau contient α litres de vin, que Bacchus vide le tonneau en x heures et Sylène en $5y$ heures; pendant une heure, Bacchus boira donc $\frac{\alpha}{x}$ litres et Sylène boira $\frac{\alpha}{5y}$ litres. Or, Bacchus boit pendant les $\frac{3}{5}$ de $5y$ heures, ou $3y$ heures; il aura donc bu, pendant ce temps, $3y$ fois $\frac{\alpha}{x}$ litres, ou $\frac{3\alpha y}{x}$ litres; il ne laisse donc à Sylène que $\alpha - \frac{3\alpha y}{x}$ ou $\frac{\alpha}{x}(x-3y)$ litres. Cherchons en combien de temps Sylène a bu ce reste : il boit α litres en $5y$ heures, c'est-à-dire un litre en $\frac{5y}{\alpha}$ heures; il a donc bu ces $\frac{\alpha}{x}(x-3y)$ litres, en $\frac{\alpha}{x}(x-3y)$ fois $\frac{5y}{\alpha}$ heures,

ou en $\frac{5y}{x}(x-3y)$ heures. De sorte que Bacchus et Sylène ayant bu successivement, ont vidé le tonneau en $3y+\frac{5y}{x}(x-3y)$ heures, c'est-à-dire, en $\frac{y}{x}(8x-15y)$ heures.

Si Bacchus et Sylène eussent bu ensemble, ils auraient bu $\frac{a}{x}+\frac{a}{5y}$ litres, ou $\frac{a(x+5y)}{5xy}$ litres, en une heure, c'est-à-dire $a(x+5y)$ litres en $5xy$ heures, et par conséquent les a litres contenus dans le tonneau en $\frac{5xy}{x+5y}$ heures; la portion de vin bue par Bacchus pendant ce temps, eût été $\frac{5xy}{x+5y}$ fois $\frac{a}{x}$ litres, ou $\frac{5ay}{x+5y}$ litres.

Les équations du problème sont donc

$$\frac{y}{x}(8x-15y)-6=\frac{5xy}{x+5y},\quad \frac{5y}{x+5y}=\frac{1}{x}(x-3y)\times\frac{2}{3};$$

elles se réduisent à

$$(1)\ldots 25xy^2-75y^3+3x^2y-6x^2-30xy=0,$$
$$(2)\ldots 30y^2+11xy-2x^2=0.$$

La nature de la question actuelle exigeant que x et y soient positifs, on rejettera les valeurs négatives de ces inconnues; ce qui conduira au calcul suivant : l'équation (2) donne

$$y=-\frac{11}{60}x+\sqrt{\frac{121}{3600}x^2+\frac{2}{30}x^2}=-\frac{11}{60}x+\frac{19}{60}x=\frac{2}{15}x.$$

La substitution de cette valeur de y dans l'équation (1) conduit à $x=15$; d'où $y=2$ et $5y=10$. Ainsi, Bacchus buvant seul eût vidé le tonneau en 15 heures, et Sylène en 10 heures. Ces nombres satisfont à toutes les conditions du problème. En effet, Bacchus trouve Sylène endormi et boit pendant les $\frac{3}{5}$ de

10 heures, ou 6 heures; or, en une heure il boit $\frac{1}{15}$ du tonneau; il a donc bu pendant 6 heures les $\frac{6}{15}$, ou les $\frac{2}{5}$ du tonneau; il laisse donc les $\frac{3}{5}$ du tonneau à Sylène; Sylène s'éveille, et boit le reste pendant les $\frac{3}{5}$ des 10 heures qu'il mettrait à vider tout le tonneau, c'est-à-dire en 6 heures; de sorte que Bacchus et Sylène buvant successivement, ont mis 12 heures à vider le tonneau. Si Bacchus et Sylène eussent bu ensemble, ils auraient vidé, dans une heure, $\frac{1}{15}+\frac{1}{10}$ ou $\frac{1}{6}$, du tonneau, et par conséquent le tonneau en 6 heures, c'est-à-dire en six heures de moins que s'ils eussent bu successivement. Pendant six heures, Bacchus eût bu les $\frac{6}{15}$ du tonneau; c'est en effet les $\frac{2}{3}$ des $\frac{3}{5}$ du tonneau qu'il avait laissés à Silène.

178. Problème. *Former la longueur du* mètre *en plaçant des pièces d'or de 20 francs et de 40 francs les unes à la suite des autres.*

Les longueurs respectives des diamètres des pièces de 20^f et de 40^f étant 21 et 26 millimètres, si l'on prend x pièces de 20^f et y pièces de 40^f, la somme $21x+26y$ millimètres des longueurs des diamètres de ces pièces devra être égale à 1000 millimètres; il suffit donc de chercher les valeurs entières de x et y, qui satisfont à l'équation $21x+26y=1000$; elles dépendent des formules

$$x=26e-200,\quad y=200-21e,$$

et comme e, x et y, doivent être des nombres entiers positifs, on ne peut faire que $e=8$, d'où $x=8$, $y=32$; et $e=9$, d'où $x=34$, $y=11$. Par conséquent, pour former la longueur du mètre avec le plus petit nombre possible de pièces de 20^f et de 40^f, il faut prendre 8 pièces de 20^f et 32 pièces de 40^f. La 2[e] solution fournit le moyen de composer la longueur du mètre avec la plus petite somme possible.

REMARQUE. Lorsqu'on assigne d'autres valeurs entières à e, une des inconnues x, y, devient négative ; ce qui indique qu'on peut obtenir la longueur du mètre en portant d'abord des pièces de 20^f ou de 40^f dans un sens, et en reportant des pièces de 40^f ou de 20^f en sens inverse. Par exemple, $e=10$ donnant $x=60$, $y=-10$, on met 60 pièces de 20^f les unes à la suite des autres ; on porte 10 pièces de 40^f en sens inverse en revenant de la dernière pièce de 20^f vers la première, la distance de la dernière pièce de 40^f à la 1re pièce de 20^f est 1000 millimètres ou un mètre.

179. PROBLÈME. *Déterminer un nombre entier* N, *qui soit égal à la somme de ses diviseurs (on fait abstraction du diviseur* N).

Un nombre *premier* ne saurait jouir de la propriété demandée, car la somme de ses diviseurs est égale à l'unité. On cherchera donc si N peut être de la forme $\alpha^m \times 6$, α et 6 désignant des nombres *premiers*. Le nombre $\alpha^m \times 6$ devant être égal à la somme de ses diviseurs, on a

$$\alpha^m \times 6 = (1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^m)\times(1+6)-\alpha^m 6;$$

d'où $$6=\frac{\alpha^m+(1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{m-1})}{\alpha^m-(1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{m-1})}.$$

Or, 6 doit être un nombre entier ; cette condition exige que le dénominateur soit l'unité ; car autrement, le *reste* de la division du numérateur de 6, par le dénominateur, serait.... $2(1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{m-1})$, et α étant positif, ce *reste* ne se réduirait pas à zéro ; il faut donc que

$$\alpha^m-1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{m-1})=1.$$

Or, cette équation revient à

$$\alpha^m-\left(\frac{\alpha^m-1}{\alpha-1}\right)=1, \quad \text{ou à} \quad (\alpha^m-1)(\alpha-2)=0.$$

α devant être plus grand que l'unité, on ne peut admettre que la valeur $+2$ de α ; elle donne

$$6=1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{m-1}+2^m,$$
$$N=(1+2+2^2+2^3+\ldots+2^m)\times 2^m,$$

et pourvu que les nombres α, 6, soient *premiers*, cette valeur de N jouira de la propriété demandée.

Ainsi, *on fait la somme des nombres* 1, 2, 2^2, 2^3, etc., *jusqu'à ce qu'on obtienne une somme qui soit un nombre premier; on multiplie cette somme par la dernière puissance de* 2 *à laquelle on s'est arrêté; le produit satisfait à la question.*

On en déduit que les valeurs de N sont 6, 28, 496, etc.; ces nombres ont reçu le nom de *nombres parfaits.*

Sur la Théorie générale des Polynomes et des Equations algébriques.

180. La propriété fondamentale de cette théorie consiste en ce que *toute équation* $f(x) = 0$ *a une racine*; c'est-à-dire qu'il existe toujours une expression réelle ou imaginaire de x qui, substituée à l'inconnue x, rend l'équation identique. Cette proposition a été long-temps regardée comme évidente; M. Cauchy en a donné une démonstration que nous allons faire connaître, et qui a l'avantage de prouver en outre que *toutes les racines imaginaires des équations algébriques sont de la forme......* $a \pm b\sqrt{-1}$; *a et b désignant des quantités réelles.*

Nous commencerons par faire observer que toute expression imaginaire de la forme $a \pm b\sqrt{-1}$ peut se mettre sous la forme

$$\pm \sqrt{-1} \sin \theta);$$

il suffira pour cela que l'on ait

$$a = \rho \cos \theta, \quad b = \rho \sin \theta;$$

d'où l'on tire

$$\rho^2 = a^2 + b^2, \quad \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

On peut donc toujours déterminer ρ et θ en valeurs réelles de manière à opérer la transformation ci-dessus indiquée.

On pourra donc facilement élever toute expression de la forme $a \pm b\sqrt{-1}$ à des puissances entières ou fractionnaires, positives ou négatives, réelles ou imaginaires; il suffira, d'après ce que nous avons vu (n° 136), de multiplier l'arc θ par le degré de la puissance, puis d'élever le facteur réel ρ à la même puissance.

181. Théorème. *Quelles que soient les valeurs réelles ou les valeurs imaginaires des constantes* $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$, *l'équation*

$$(1)\ldots a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0;$$

dans laquelle n *désigne un nombre entier égal ou supérieur à l'unité, a toujours des racines réelles ou imaginaires.*

Démonstration. Désignons, pour abréger, par $f(x)$ le premier membre de l'équation (1); $f(x)$ sera une fonction réelle ou imaginaire, mais toujours entière, de la variable x; et, puisque toute expression réelle u se trouve comprise comme cas particulier dans une expression imaginaire $u+v\sqrt{-1}$, il suffira, pour établir le théorème énoncé, de démontrer généralement qu'on peut satisfaire à l'équation

$$(1)\ldots f(x) = 0,$$

en prenant

$$x = u + v\sqrt{-1},$$

puis attribuant aux nouvelles variables u et v des valeurs réelles. Or, si l'on substitue la valeur précédente de x dans la fonction $f(x)$, le résultat sera de la forme

$$\phi(u, v) + \sqrt{-1}\,\chi(u, v),$$

$\phi(u, v)$, $\chi(u, v)$ désignant deux fonctions réelles et entières des variables u et v. Cela posé, l'équation (1) deviendra

$$\phi(u, v) + \sqrt{-1}\,\chi(u, v) = 0,$$

et, pour y satisfaire, il suffira de vérifier les deux équations

réelles

$$(2)\ldots\begin{cases}\varphi(u,v)=0,\\ \chi(u,v)=0,\end{cases}$$

ou, ce qui revient au même, l'équation unique

$$(3)\ldots[\varphi(u,v)]^2+[\chi(u,v)]^2=0.$$

Donc, si l'on pose pour plus de commodité

$$(4)\ldots\mathrm{F}(u,v)=[\varphi(u,v)]^2+[\chi(u,v)]^2,$$

il restera seulement à montrer que l'on peut obtenir des valeurs réelles de u et de v propres à faire évanouir la fonction

$$\mathrm{F}(u,v).$$

On y parviendra sans peine à l'aide des considérations suivantes:

D'abord, pour déterminer la valeur générale de la fonction $\mathrm{F}(u,v)$, on représentera chacune des constantes réelles ou imaginaires $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$, ainsi que la variable imaginaire $u+v\sqrt{-1}$, par le produit d'un module et d'une expression réduite; et l'on écrira en conséquence

$$(5)\ldots\begin{cases}a_0=\rho_0(\cos\theta_0+\sqrt{-1}\sin\theta_0),\ a_1=\rho_1(\cos\theta_1+\sqrt{-1}\sin\theta_1)\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{n-1}=\rho_{n-1}(\cos\theta_{n-1}+\sqrt{-1}\sin\theta_{n-1}),\ a_n=\rho_n(\cos\theta_n+\sqrt{-1}\sin\theta_n).\end{cases}$$

$$(6)\ldots u+v\sqrt{-1}=r(\cos t+\sqrt{-1}\sin t).$$

On aura par suite

$$(7)\ldots\begin{cases}f(u+v\sqrt{-1})=\rho_0 r^n[\cos(nt+\theta_0)+\sqrt{-1}\sin(nt+\theta_0)]\\ \qquad+\rho_1 r^{n-1}[\cos(\overline{n-1}\,.\,t+\theta_1)+\sqrt{-1}\sin(\overline{n-1}\,.\,t+\theta_1)]\\ \qquad+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \qquad+\rho_{n-1}r[\cos(t+\theta_{n-1})+\sqrt{-1}\sin(t+\theta_{n-1})]\\ \qquad+\rho_n(\cos\theta_n+\sqrt{-1}\sin\theta_n);\end{cases}$$

et l'on en déduira

$$(8)\ldots\begin{cases}\varphi(u,v)=\rho_0 r^n\cos(nt+\theta_0)+\rho_1 r^{n-1}\cos(\overline{n-1}\,.\,t+\theta_1)+\ldots\\ \qquad\ldots+\rho_{n-1}r\cos(t+\theta_{n-1})+\rho_n\cos\theta_n,\\ \chi(u,v)=\rho_0 r^n\sin(nt+\theta_0)+\rho_1 r^{n-1}\sin(\overline{n-1}\,.\,t+\theta_1)+\ldots\\ \qquad\ldots+\rho_{n-1}r\sin(t+\theta_{n-1})+\rho_n\sin\theta_n;\end{cases}$$

$$
(9)\ldots\left\{
\begin{aligned}
F(u,v) &= \left\{\begin{matrix} \rho_0 r^n \cos(nt+\theta_0) + \rho_1 r^{n-1}\cos(\overline{n-1}\,.\,t+\theta_1) + \ldots \\ \ldots\ldots + \rho_{n-1}\, r\cos(t+\theta_{n-1}) + \rho_n \cos\theta_n \end{matrix}\right\}^2 \\
&+ \left\{\begin{matrix} \rho_0 r^n \sin(nt+\theta_0) + \rho_1 r^{n-1}\sin(\overline{n-1}\,.\,t+\theta_1) + \ldots \\ \ldots\ldots + \rho_{n-1}\, r\sin(t+\theta_{n-1}) + \rho_n \sin\theta_n \end{matrix}\right\}^2 \\
&= r^{2n} \times \left\{\begin{matrix} \rho_0^2 + \dfrac{2\rho_0\rho_1\cos(t+\theta_0-\theta_1)}{r} \\ + \dfrac{\rho_1^2 + 2\rho_0\rho_2\cos(2t+\theta_0-\theta_2)}{r^2} \\ + \text{etc.} \ldots\ldots \end{matrix}\right\}.
\end{aligned}
\right.
$$

Il résulte de cette dernière formule que la fonction $F(u, v)$, toujours évidemment positive, est le produit de deux facteurs, dont l'un, savoir

$$r^{2n} = (u^2 + v^2)^n$$

croîtra indéfiniment si l'on attribue aux variables u, v ou à l'une d'elles seulement des valeurs numériques de plus en plus grandes, tandis que l'autre facteur convergera dans la même hypothèse vers la limite ρ_0^2, c'est-à-dire vers une limite finie différente de zéro. On en conclura que la fonction $F(u, v)$ ne peut conserver une valeur finie qu'autant que les deux quantités u, v reçoivent elles-mêmes des valeurs de cette espèce, et devient infiniment grande dès que l'une des deux quantités croît indéfiniment. De plus, comme l'équation (4) donne pour $F(u, v)$, une fonction entière, et par conséquent une fonction continue des variables u et v, il est clair que $F(u, v)$, variant avec elles par degrés insensibles, et ne pouvant s'abaisser au-dessous de zéro, atteindra une ou plusieurs fois une certaine limite inférieure qu'elle ne dépassera jamais. Représentons par A cette limite, et par u_0, v_0 un des systèmes de valeurs finies de u et de v, pour lesquels $F(u, v)$ se réduit à A, en sorte qu'on ait identiquement,

$$(10)\ldots F(u_0, v_0) = A.$$

La différence $F(u, v) - F(u_0, v_0)$ ne s'abaissera jamais au-dessous de zéro; par conséquent, si l'on fait

$$(11)\ldots u = u_0 + \alpha h, \quad v = v_0 + \alpha k,$$

α désignant une quantité infiniment petite, et h, k deux quan-

tités finies, l'expression

$$F(u_0 + \alpha h, v_0 + \alpha k) - F(u_0, v_0)$$

ne sera jamais négative. En partant de ce principe, il sera facile de déterminer la valeur de la constante A, ainsi qu'on va le faire voir.

Si dans l'expression imaginaire $f(u + v\sqrt{-1})$ on substitue pour u et v leurs valeurs données par les formules (11), cette expression, devenant alors une fonction imaginaire et entière du produit

$$\alpha(h + k\sqrt{-1}),$$

pourra être développée suivant les puissances entières et ascendantes de ce même produit. En désignant par

$$R(\cos T + \sqrt{-1}\sin T), \quad R_1(\cos T_1 + \sqrt{-1}\sin T_1), \\ \ldots\ldots\ldots, \; R_n(\cos T_n + \sqrt{-1}\sin T_n),$$

les coefficiens imaginaires de ces puissances dont quelques-uns peuvent se réduire à zéro, et faisant pour plus de commodité

$$(12)\ldots h + k\sqrt{-1} = \rho(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta),$$

on obtiendra l'équation

$$(13)\ldots\begin{cases} f[u_0 + v_0\sqrt{-1} + \alpha(h + k\sqrt{-1})] = R(\cos T + \sqrt{-1}\sin T) \\ \quad + \alpha R_1 \rho[\cos(T_1 + \theta) + \sqrt{-1}\sin(T_1 + \theta)] + \ldots \\ \ldots\ldots + \alpha^n R^n \rho^n[\cos(T_n + n\theta) + \sqrt{-1}\sin(T_n + n\theta)], \end{cases}$$

dans laquelle les termes du second membre, et par conséquent les modules

$$R, R_1, \ldots, R_n$$

ne sauraient s'évanouir tous en même temps. Comme on aura d'ailleurs

$$(14)\ldots\begin{cases} f[u_0 + \alpha h + (v_0 + \alpha k)\sqrt{-1}] \\ = \varphi(u_0 + \alpha h, v_0 + \alpha k) + \sqrt{-1}\,\chi(u_0 + \alpha h, v_0 + \alpha k); \end{cases}$$

on conclura de l'équation (13)

$$(15)\ldots\begin{cases}\varphi(u_0+\alpha h,\, v_0+\alpha k) = \mathrm{R}\cos \mathrm{T} + \alpha \mathrm{R}_1 \rho \cos(\mathrm{T}_1+\theta)+\ldots \\ \qquad\qquad \ldots\ldots + \alpha^n \mathrm{R}_n \rho^n \cos(\mathrm{T}_n + n\theta), \\ \chi(u_0+\alpha h,\, v_0+\alpha k) = \mathrm{R}\sin \mathrm{T} + \alpha \mathrm{R}_1 \rho \sin(\mathrm{T}_1+\theta)+\ldots \\ \qquad\qquad \ldots\ldots + \alpha^n \mathrm{R}_n \rho^n \sin(\mathrm{T}_n + n\theta);\end{cases}$$

et par suite

$$(16)\ldots\begin{cases}\mathrm{F}(u_0+\alpha h,\, v_0+\alpha k) \\ = [\mathrm{R}\cos \mathrm{T} + \alpha \mathrm{R}_1 \rho \cos(\mathrm{T}_1+\theta)+\ldots+\alpha^n \mathrm{R}_n \rho^n \cos(\mathrm{T}_n + n\theta)]^2 \\ + [\mathrm{R}\sin \mathrm{T} + \alpha \mathrm{R}_1 \rho \sin(\mathrm{T}_1+\theta)+\ldots+\alpha^n \mathrm{R}_n \rho^n \sin(\mathrm{T}_n + n\theta)]^2\end{cases}$$

Si dans cette dernière formule on pose $\alpha = 0$, on en tirera

$$\mathrm{F}(u_0, v_0) = \mathrm{R}^2.$$

Donc $$\mathrm{R}^2 = \mathrm{A},\quad \mathrm{R} = \mathrm{A}^{\frac{1}{2}}.$$

Si maintenant on développe le second membre de l'équation (16) suivant les puissances descendantes de R, et que l'on y remplace ensuite R par $\mathrm{A}^{\frac{1}{2}}$, cette équation deviendra

$$(17)\ldots \mathrm{F}(u_0+\alpha h,\, v_0+\alpha k)$$
$$= \mathrm{A} + 2\mathrm{A}^{\frac{1}{2}} \alpha\rho\, [\mathrm{R}_1 \cos(\mathrm{T}_1 - \mathrm{T} + \theta) + \ldots + \alpha^{n-1}\rho^{n-1} \mathrm{R}_1 \cos(\mathrm{T}_n - \mathrm{T} + n\theta)]$$
$$+ \alpha^2\rho^2 \times \begin{Bmatrix} [\mathrm{R}_1 \cos(\mathrm{T}_1+\theta)+\ldots+\alpha^{n-1}\rho^{n-1}\mathrm{R}_n \cos(\mathrm{T}_n+n\theta)]^2 \\ + [\mathrm{R}_1 \sin(\mathrm{T}_1+\theta)+\ldots+\alpha^{n-1}\rho^{n-1}\mathrm{R}_n \sin(\mathrm{T}_n+n\theta)]^2 \end{Bmatrix};$$

et, si l'on fait passer dans le premier membre la quantité $\mathrm{A} = \mathrm{F}(u_0, v_0)$, on trouvera définitivement

$$(18)\ldots \mathrm{F}(u_0+\alpha h,\, v_0+\alpha k) - \mathrm{F}(u_0, v_0)$$
$$= 2\mathrm{A}^{\frac{1}{2}} \alpha\rho\, [\mathrm{R}_1 \cos(\mathrm{T}_1 - \mathrm{T} + \theta) + \ldots + \alpha^{n-1}\rho^{n-1} \mathrm{R}_n \cos(\mathrm{T}_n - \mathrm{T} + n\theta)]$$
$$+ \alpha^2\rho^2 \times \begin{Bmatrix} [\mathrm{R}_1 \cos(\mathrm{T}_1+\theta)+\ldots+\alpha^{n-1}\rho^{n-1}\mathrm{R}_n \cos(\mathrm{T}_n+n\theta)]^2 \\ + [\mathrm{R}_1 \sin(\mathrm{T}_1+\theta)+\ldots+\alpha^{n-1}\rho^{n-1}\mathrm{R}_n \sin(\mathrm{T}_n+n\theta)]^2 \end{Bmatrix}.$$

Cela posé, puisque la différence

$$\mathrm{F}(u_0+\alpha h,\, v_0+\alpha k) - \mathrm{F}(u_0, v_0)$$

ne doit jamais s'abaisser au-dessous de la limite zéro, il faudra de toute nécessité que, pour de très petites valeurs numériques de α, le second membre de l'équation précédente, et par suite le premier terme de ce second membre, c'est-à-dire le terme qui renferme la plus petite puissance de α, ne puisse devenir négatif. Or, en désignant par R_m la première des quantités

$$\mathrm{R}_1,\ \mathrm{R}_2,\ \ldots\ldots\ \mathrm{R}_n,$$

qui obtient une valeur différente de zéro, on trouvera pour le terme dont il s'agit

$$2A^{\frac{1}{2}}\alpha^m\rho^m R_m \cos(T_m - T + m\theta)$$

si A n'est pas nul, et

$$\alpha^{2m}\rho^{2m}R_m^2$$

dans l'hypothèse contraire. De plus, comme la valeur de l'arc θ étant tout-à-fait indéterminée, on peut en disposer de manière à donner au facteur

$$\cos(T_m - T + m\theta),$$

et par conséquent, au produit

$$2A^{\frac{1}{2}}\alpha^m\rho^m R_m \cos(T_m - T + m\theta)$$

tel signe que l'on voudra, il est clair que la seconde hypothèse reste seule admissible. On aura donc nécessairement

$$(19)\ldots A = 0;$$

ce qui réduira l'équation (10) à

$$(20)\ldots F(u_0, v_0) = 0.$$

Il en résulte que la fonction $F(u, v)$ s'évanouira si l'on attribue aux variables u, v les valeurs réelles u_0, v_0; et par suite que l'on vérifiera l'équation

$$(1)\ldots f(x) = 0,$$

en prenant

$$x = u_0 + v_0\sqrt{-1}.$$

En d'autres termes, $u_0 + v_0\sqrt{-1}$ sera une racine de l'équation

$$(1)\ldots a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0.$$

Corollaire. *Si* $a + b\sqrt{-1}$ *est racine d'une équation* $f(x) = 0$ *à coefficiens réels*, $a - b\sqrt{-1}$ *le sera aussi.*

En effet, soit $P+Q\sqrt{-1}$ le résultat de la substitution de $a+b\sqrt{-1}$ à x dans le premier membre de l'équation, il faudra qu'on ait séparément $P=0$, $Q=0$. Or les termes de Q ne pourront provenir que des puissances impaires de $b\sqrt{-1}$ et changeront de signe avec b; tandis que P ne renfermant b qu'à des puissances paires, restera le même, quel que soit le signe de b; la substitution de $a-b\sqrt{-1}$ à x donnera donc pour résultat $P-Q\sqrt{-1}$, et $P-Q\sqrt{-1}$ est égal à zéro, puisque P et Q sont réduits à zéro. Donc $a-b\sqrt{-1}$ satisfera à l'équation.

182. Théorème. *Tout polynome de degré pair, à coefficiens réels, peut être décomposé en facteurs réels du second degré.*

En effet, les racines imaginaires sont en nombre pair, et par couples de la forme $a\pm b\sqrt{-1}$, qui donnent toujours deux facteurs $x-a-b\sqrt{-1}$ et $x-a+b\sqrt{-1}$ dont le produit est $(x-a)^2+b^2$. Quant aux racines réelles, qui seront aussi en nombre pair, elles fourniront chacune un facteur réel du premier degré, et le premier membre de l'équation pourra par conséquent être décomposé en facteurs réels du second degré.

En faisant $a+b\sqrt{-1}=\rho(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)$,

on aura

$$(x-a)^2+b^2=(x-\rho\cos\theta)^2+\rho^2\sin^2\theta=x^2-2\rho x\cos\theta+\rho^2.$$

Telle est la forme sous laquelle pourront se mettre tous les facteurs du second degré relatifs à deux racines imaginaires conjuguées.

183. On sait que tout polynome du degré m est égal au produit de m facteurs du premier degré, multiplié par le coefficient du premier terme; et de plus qu'il n'y a qu'une seule manière d'opérer cette décomposition : de sorte qu'une équation du degré m a toujours m racines et jamais davantage.

Cela posé, deux polynomes entiers du degré m sont nécessairement identiques lorsqu'ils sont égaux entre eux pour plus de m valeurs de la lettre ordonnatrice; car, soient $F(x)$ et $\varphi(x)$

ces deux polynomes, on doit avoir $F(x) = \phi(x)$ pour un nombre de valeurs de x supérieur au degré de cette équation, ce qui ne peut avoir lieu si les termes ne se détruisent pas identiquement.

184. PROBLÈME. *Former un polynome entier du degré* m, *connaissant ses* m *racines, et la valeur qu'il obtient quand on y fait* $x = x_0$.

Soit u ce polynome; soient $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$ ses m racines, et u_0 la valeur de u pour $x = x_0$. Le polynome cherché devant être divisible par chacun des m binomes $x - x_1, x - x_2, \ldots, x - x_m$, sera de la forme

$$u = A(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ldots (x - x_m).$$

Pour déterminer A, faisons $x = x_0$, nous aurons

$$u_0 = A(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3) \ldots (x_0 - x_m);$$

$$\text{d'où } A = \frac{u_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3) \ldots (x_0 - x_m)},$$

et par suite

$$u = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_m)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \ldots (x_0 - x_m)} \times u_0.$$

185. PROBLÈME. *Former un polynome entier du degré* m, *connaissant les* m + 1 *valeurs qu'il prend quand on donne successivement à* x *les* m + 1 *valeurs*, $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_m$.

Soit u ce polynome, et $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_m$, ses $m+1$ valeurs connues. Nous avons trouvé (n° 184) la forme d'un polynome du degré m qui se réduisait à une valeur donnée u_0, pour $x = x_0$, et qui devenait nul pour toutes les valeurs x_1, x_2, $x_3, \ldots, x_m$. Nous résoudrons donc la question en faisant la somme de $m+1$ polynomes de cette forme qui se réduisent respectivement à $u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots, u_m$, pour chacune des $(m+1)$ valeurs d'x et qui deviennent nuls pour les m au-

tres; il en résultera

$$u = u_0 \times \frac{(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_m)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)\ldots(x_0 - x_m)}$$
$$+ u_1 \times \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)\ldots(x - x_m)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\ldots(x_1 - x_m)}$$
$$\vdots$$
$$+ u_m \times \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{m-1})}{(x_m - x_0)(x_m - x_1)\ldots(x_m - x_{m-1})}.$$

Cette somme formant un polynome du degré m en x, qui pour les valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_m$, attribuées à x, acquiert les $m+1$ valeurs données $u_0, u_1, \ldots, u_m$, satisfait aux conditions demandées et est le seul qui puisse y satisfaire, puisque deux polynomes entiers sont identiques quand ils sont égaux pour un nombre de valeurs d'x supérieur à leur degré.

Si l'on change u en $u - a$, a désignant une constante quelconque, il suffira de changer $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_m$ en $u_0 - a$, $u_1 - a, \ldots, u_m - a$, car si la substitution de x_m donne $u = u_m$, elle rendra $u - a = u_m - a$; on aura alors la formule suivante :

$$u - a = (u_0 - a)\frac{(x - x_1)\ldots(x - x_m)}{(x_0 - x_1)\ldots(x_0 - x_m)}$$
$$+ (u_1 - a)\frac{(x - x_0)\ldots(x - x_m)}{(x_1 - x_0)\ldots(x_1 - x_m)}$$
$$\vdots$$
$$+ (u_m - a)\frac{(x - x_0)\ldots(x - x_{m-1})}{(x_m - x_0)\ldots(x_m - x_{m-1})}.$$

Cette formule est préférable à la précédente en ce qu'on peut profiter de la constante a pour faire disparaître un terme du second membre; il suffira pour cela de la prendre égale à l'une des valeurs $u_0, u_1, \ldots, u_m$.

Si par exemple on voulait déterminer un polynome du premier degré en x, qui se réduisît respectivement à u_0 et u_1, pour les valeurs x_0, x_1 de x; on ferait $a = u_0$, dans la dernière

formule, et on aurait

$$u - u_0 = \frac{u_1 - u_0}{x_1 - x_0}(x - x_0).$$

Si u et x désignent l'ordonnée et l'abscisse d'un même point, cette équation sera celle de la droite qui passera par les deux points x_0, u_0 et x_1, u_1.

186. Théorème. *Soient* $x_0, x_1, \ldots, x_n$ *un nombre* $m+1$ *de valeurs d'*x, *à chacune desquelles correspondent* $n+1$ *valeurs d'*y *qui peuvent varier d'une valeur d'*x *à l'autre : si deux fonctions entières, du degré* m *en* x, *et du degré* n *en* y, *deviennent égales pour toutes ces valeurs d'*x *et d'*y, *elles seront identiquement égales.* En effet, soient les deux fonctions $F(x, y)$, $\varphi(x,y)$: les deux fonctions $F(x_0, y)$, $\varphi(x_0, y)$, devenant égales pour $n+1$ valeurs de y, seront égales, quel que soit y, d'après un des théorèmes précédens. Semblablement $F(x_1, y)$ et $\varphi(x_1, y)$ seront égales quel que soit y, et ainsi de suite jusqu'à $F(x_m, y)$ et $\varphi(x_m, y)$. On aura ainsi $(m+1)$ égalités dans lesquelles on peut supposer que l'on donne à y une même valeur arbitraire ; d'où il suit que, quel que soit y, les fonctions $F(x, y)$ et $\varphi(x,y)$ sont égales pour $m+1$ valeurs de x; donc enfin elles sont égales quel que soit x, et par suite les deux fonctions $F(x,y)$, $\varphi(x,y)$ sont égales quels que soient x et y.

187. Corollaire. Il suit de là que deux fonctions entières sont égales identiquement, lorsqu'elles deviennent égales pour des valeurs entières quelconques de ces variables ; ou seulement pour toutes les valeurs entières qui surpassent une limite donnée.

On en peut dire autant des fonctions d'une seule variable.

188. Problème. *Former une fonction entière du degré* m *en* x *et du degré* n *en* y, *connaissant les valeurs particulières qu'elle reçoit lorsqu'en prenant pour* x *l'une des valeurs de la suite*

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_m$$

on prend en même temps pour y *l'une quelconque de* $n+1$ *valeurs données, qui changent d'une valeur d'*x *à l'autre.*

Si dans la formule trouvée (page 190), pour le cas d'une seule variable, on remplace u par $\mathrm{F}(x, y)$, on trouvera

$$\mathrm{F}(x,y)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_m)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_m)}\mathrm{F}(x_0,y)$$
$$+\frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_m)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_m)}\mathrm{F}(x_1,y)$$
$$\vdots$$
$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{m-1})}{(x_m-x_0)(x_m-x_1)\ldots(x_m-x_{m-1})}\mathrm{F}(x_m,y).$$

Et si l'on désigne par p un nombre entier quelconque au-dessous de $m+1$, et par $y_0, y_1, y_2 \ldots y_n$ les $n+1$ valeurs d'y correspondantes à x_p, on aura semblablement

$$\mathrm{F}(x_p,y)=\frac{(y-y_1)(y-y_2)\ldots(y-y_n)}{(y_0-y_1)(y_0-y_2)\ldots(y_0-y_n)}\mathrm{F}(x_p,y_0),$$
$$+\ldots\quad\vdots$$
$$+\frac{(y-y_0)(y-y_1)\ldots(y-y_{n-1})}{(y_n-y_0)(y_n-y_1)\ldots(y_n-y_{n-1})}\mathrm{F}(x_p,y_n).$$

Cette dernière formule fera connaître successivement les valeurs de $\mathrm{F}(x_0, y), \ldots, \mathrm{F}(x_m, y)$, en donnant à p les valeurs successives $0, 1, 2, \ldots, m$; et les reportant dans l'avant dernière équation, on connaîtra la fonction demandée $\mathrm{F}(x, y)$.

On agirait de la même manière pour les fonctions d'un nombre quelconque de variables.

Nous allons offrir quelques applications de ces principes.

189. Problème. *Exprimer le produit*

$$(x+y)(x+y-1)\ldots(x+y-n+1),$$

au moyen des produits suivans

$$x(x-1)\ldots(x-n+1),$$
$$y(y-1)\ldots(y-n+1),$$

et de ceux qu'on obtient en remplaçant n *par les valeurs*

$$1, 2, 3, 4, \ldots, n-2, n-1.$$

Supposons d'abord que x et y soient entiers et supérieurs à n ; le produit proposé sera le numérateur de la fraction qui exprime le nombre de combinaisons que l'on peut faire avec $x+y$ lettres prises n à n. Désignons par $a, b, c, d, \ldots, l$, un nombre x de ces lettres et par $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \mu$, les y autres. Nous pourrons considérer le nombre total des combinaisons, comme décomposé en groupes renfermant, le premier, les combinaisons où les n lettres seront prises seulement dans les x premières ; le second, les combinaisons où il entrera $n-1$ lettres des x premières, et une des y restantes, ... et enfin le dernier groupe renfermant les combinaisons faites seulement avec les y lettres $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \mu$.

Or, on voit facilement, d'après la théorie connue des combinaisons, que les divers nombres de combinaisons renfermées dans ces groupes sont respectivement,

$$\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)}{1\;.\;2\;.\;3\;\ldots\;n},$$

$$\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+2)}{1\;.\;2\;.\;3\;\ldots\;n-1}\cdot\frac{y}{1},$$

$$\frac{x(x-1)\ldots(x-n+3)}{1\;.\;2\;\ldots\;(n-2)}\cdot\frac{y(y-1)}{1\;.\;2},$$

$$\vdots$$

$$\frac{y(y-1)(y-2)\ldots(y-n+1)}{1\;.\;2\;.\;3\;\ldots\;n}.$$

Egalant cette somme au nombre total des combinaisons des $x+y$ lettres n à n, et chassant le dénominateur, on aura le développement demandé

$$(x+y)(x+y-1)(x+y-2)\ldots(x+y-n+1)$$

$$=x(x-1)\ldots(x-n+1)+\frac{n}{1}x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+2).y$$

$$+\frac{n(n-1)}{1.2}x(x-1)\ldots(x-n+3)y(y+1)$$

$$+\ldots+\frac{n}{1}x.y(y-1)\ldots(y-n+2)+y(y-1)\ldots(y-n+1).$$

Cette égalité ayant lieu pour toutes les valeurs entières de x et y supérieures à n, aura lieu quels que soient x et y.

1ᵉʳ Corollaire. Si l'on remplace x par $-x$ et y par $-y$, la formule précédente devient

$$(x+y)(x+y+1)\ldots(x+y+n-1)$$
$$=x(x+1)\ldots(x+n-1)+\frac{n}{1}x(x+1)\ldots(x+n-2).y$$
$$+\frac{n(n-1)}{1.2}x(x+1)\ldots(x+n-3).y(y+1)+\ldots+y(y+1)\ldots(y+n-1).$$

2ᵉ Corollaire. Si l'on remplace dans la même formule, x et y par $\frac{x}{k}$, $\frac{y}{k}$, elle deviendra, après avoir chassé les dénominateurs,

$$(x+y)(x+y-k)(x+y-2k)\ldots(x+y-nk+k)$$
$$=x(x-k)\ldots(x-nk+k)+\frac{n}{1}x(x-k)\ldots(x-nk+2k)y$$
$$+\ldots y(y+k)\ldots(y-nk+k),$$

k pouvant être un nombre quelconque entier ou fractionnaire, positif ou négatif.

3ᵉ Corollaire. Si dans la même formule on égale dans les deux membres les termes du degré n par rapport à x et y à la fois, on obtiendra le développement de la puissance n du binome $x+y$, et on trouvera

$$(x+y)^n=x^n+nx^{n-1}y+\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}y^2+\ldots+y^n.$$

190. On suivrait la même marche pour développer le produit des n facteurs

$$(x+y+z\ldots),(x+y+z\ldots-1),\ldots,(x+y+\ldots-n+1),$$

au moyen des produits

$$x(x-1)\ldots(x-n+1),$$
$$y(y-1)\ldots(y-n+1),$$
$$z(z-1)\ldots(z-n+1),$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

et l'on en déduirait semblablement le développement de

$$(x+y+z\ldots.)^n.$$

Sur la recherche des Equations d'après des relations connues entre leurs racines et les racines d'Equations données.

Nous supposerons d'abord que les racines de l'équation cherchée ne soient liées respectivement qu'avec une des racines de l'équation donnée, puis avec deux, trois, et enfin avec un nombre quelconque d'entre elles; de là résulteront les problèmes suivans :

191. PROBLÈME. *Trouver une équation à une seule inconnue, y, qui soit telle, que ses racines soient liées à chacune de celles de l'équation donnée* $F(x)=0$, *par la relation* $\varphi(x, y)=0$.

La question revient à trouver une équation qui ait pour racines toutes les valeurs d'y que l'on obtiendrait en remplaçant dans $\varphi(x, y)=0$, l'inconnue x par les différentes racines de $F(x)=0$. Il ne s'agit donc que de trouver, d'après la théorie connue de l'élimination, l'équation finale en y, résultant de l'élimination de x entre les deux équations

$$F(x)=0, \quad \varphi(x, y)=0.$$

Les transformations les plus usuelles relatives à la résolution des équations, se rapportent à ce problème.

192. PROBLÈME. *Trouver une équation dont les racines soient liées à* n *racines quelconques d'une équation donnée, par une relation donnée.*

Soit $F(x)=0$ l'équation donnée. Désignons par $x_1, x_2, \ldots, x_n$, n racines quelconques de cette équation, et par

$$(1) \ldots \varphi(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, y)=0,$$

la relation qui doit exister entre ces racines et la racine correspondante y de l'équation cherchée; il faudra que l'on ait en même temps

$$F(x_1)=0, \; F(x_2)=0, \ldots, F(x_n)=0.$$

Ces n équations ayant lieu conjointement avec $\varphi(x_1, x_2 .. y) = 0$, quelles que soient les racines $x_1, \ldots, x_n$, et n'exprimant autre chose sinon que $x_1, x_2, \ldots, x_n$, sont racines de $F(x) = 0$, il s'ensuit que si l'on élimine entre ces $n + 1$ équations, les n quantités, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, l'équation finale en y aura pour racines les valeurs résultantes de toutes les combinaisons assignées par l'équation (1), entre n racines de $F(x) = 0$, et sera par conséquent l'équation cherchée.

Nous allons donner quelques applications de ce principe, au cas où les racines de l'équation cherchée dépendraient de deux racines d'une équation donnée d'après une loi connue.

193. Problème. *Trouver une équation dont les racines soient les différences entre deux racines quelconques d'une équation donnée.*

Soit l'équation donnée $F(x) = 0$. Désignant par x_1, x_2, deux quelconques de ses racines, et par y la racine correspondante de l'équation cherchée, on aura à éliminer x_1 et x_2 entre les trois équations,

$$F(x_1) = 0, \quad F(x_2) = 0, \quad x_1 - x_2 = y.$$

La dernière donne $x_1 = x_2 + y$.

Reportant cette valeur dans $F(x_1) = 0$, il reste à éliminer x_2 entre

$$F(x_2) = 0 \quad \text{et} \quad F(x_2 + y) = 0;$$

ou, ce qui est la même chose, à éliminer x entre

$$F(x) = 0 \quad \text{et} \quad F(x + y) = 0.$$

Si l'on avait d'abord éliminé x_2 au lieu de x_1, on aurait eu $x_2 = x_1 - y$; et il serait resté à éliminer x_1 entre les deux équations $F(x_1) = 0$, $F(x_1 - y) = 0$, ou bien entre la proposée et $F(x - y) = 0$. D'où il suit que pour avoir l'équation aux différences on peut substituer à x indifféremment $x \pm y$ et éliminer x entre l'équation proposée et celle qui résulte de cette substitution. Cela montre d'abord que l'équation aux différences

ne change pas quand on change y en $-y$, et que par conséquent les termes de cette équation sont tous de degrés pairs, comme nous le verrons encore par une autre considération.

On voit facilement qu'en faisant passer successivement x_1 et x_2 par les m valeurs dont elles sont susceptibles, m étant le degré de l'équation $F(x)=0$, il en résultera m^2 valeurs pour y; l'équation finale en y sera donc du degré m^2; mais on pourra l'abaisser en observant d'abord qu'il y aura m valeurs nulles de y relatives aux différences de chaque racine avec elle-même; on pourra donc y supprimer le facteur y^m, ce qui réduira le degré à m^2-m ou $m(m-1)$. On observera de plus que s'il y a la racine x_1-x_2, il y aura aussi la racine x_2-x_1, et que par conséquent les facteurs de l'équation en y sont de la forme

$$(y-\alpha)\ (y+\alpha), (y-\beta)\ (y+\beta), \ldots \text{ou } (y^2-\alpha^2), (y^2-\beta^2)\ldots$$

Et posant $y^2=z$, on aura une équation du degré $\frac{1}{2}m(m-1)$ en z, qui aura pour racines les carrés des différences des racines de la proposée.

Nota. Il est bon d'observer comment on peut supprimer de suite les m solutions nulles, au commencement du calcul. L'équation $F(x+y)=0$ peut se développer comme il suit:

$$F(x)+F'(x)y+F''(x)\frac{y^2}{1.2}+\ldots=0,$$

et en vertu de l'équation proposée on pourra supprimer le premier terme $F(x)$, ce qui réduira la question à chercher les solutions communes aux équations

$$F'(x)y+F''(x)\frac{y^2}{1.2}+\ldots=0 \text{ et } F(x)=0.$$

Or, si l'on divise la première par y, on détruit les m solutions communes à $y=0$ et $F(x)=0$, qui sont précisément celles que l'on voulait supprimer. On continuera alors l'opération comme à l'ordinaire, et l'équation finale en y ne contiendra

que les $m(m-1)$ différences entre chaque racine et les $m-1$ autres.

194. PROBLÈME. *Trouver une équation qui ait pour racines les sommes deux à deux des racines d'une equation du* m^{ième} *degré*, (1)... $F_m(x)=0$.

Soient x_1, x_2, deux racines de l'équation (1), et y la racine correspondante de l'équation cherchée; on obtiendra celle-ci en éliminant x_1 et x_2 entre les trois équations

$$F(x_1)=0,\quad F(x_2)=0,\quad x_1+x_2=y.$$

La dernière donne $x_1=y-x_2$; substituant cette valeur de x_1, il faudra éliminer x_2 entre les équations

$$F(x_2)=0 \text{ et } F(y-x_2)=0,$$

ou bien éliminer x entre

$$F(x)=0 \text{ et } F(y-x)=0.$$

L'équation résultante sera du degré m^2, par la même raison que dans le cas de l'équation aux différences; mais on pourra encore l'abaisser en observant d'abord qu'elle renfermera les racines x_1+x_1, x_2+x_2, etc., ou $2x_1$, $2x_2$, etc. Formant donc une équation qui ait ses racines doubles de celles de la proposée, ce qui se fera en substituant dans celle-ci $\frac{1}{2}x$ à x, puis divisant l'équation aux sommes par l'équation qu'on obtiendra ainsi, on aura une équation du degré m^2-m ou $m(m-1)$ qui n'aura plus pour racines que les sommes des racines différentes de la proposée.

On remarquera encore que x_1+x_2 et x_2+x_1 étant racines à la fois, elles seront toutes égales deux à deux; le premier membre sera donc un carré, et en extrayant la racine carrée, il restera une équation du degré $\frac{1}{2}m(m-1)$.

NOTA. On peut supprimer dès le commencement du calcul les solutions doubles des racines de la proposée. En effet, il faut éliminer x entre les équations

$$F(x)=0 \text{ et } F(y-x)=0.$$

Retranchant la première de la seconde, on pourra substituer à celle-ci la différence $F(y-x)-F(x)=0$, et éliminer entre cette dernière et $F(x)=0$. Or $F(y-x)-F(x)$ est divisible par $y-2x$, puisque ce polynome se réduit à zéro quand on y fait $y=2x$. Supprimant donc ce facteur, on ôtera les m racines doubles de celles de l'autre équation $F(x)=0$.

195. Problème. *Trouver l'équation aux rapports des racines d'une équation du* $m^{ième}$ *degré*, $F(x)=0$.

Soient x_1, x_2 deux racines de l'équation $F(x)=0$, et y l'inconnue de l'équation cherchée; il faudra éliminer x_1 et x_2 entre

$$F(x_1)=0, \quad F(x_2)=0 \quad \text{et} \quad \frac{x_1}{x_2}=y.$$

Cette dernière donne $x_1=yx_2$; substituant dans la première, il vient l'équation $F(yx_2)=0$, et il faudra éliminer x_2 entre cette dernière équation et $F(x_2)=0$, ou, ce qui revient au même, éliminer x entre $F(x)=0$ et $F(xy)=0$.

On verra encore qu'en faisant passer successivement x_1 et x_2 par les m valeurs dont elles sont susceptibles, il en résultera m^2 valeurs pour y, parmi lesquelles m seront égales à l'unité et pourront par conséquent être supprimées en divisant le premier membre de l'équation finale par $(y-1)^m$. De plus, s'il y a la racine $\frac{x_1}{x_2}$, il y aura aussi la racine $\frac{x_2}{x_1}$; ce qui montre que l'équation résultante, du degré m^2-m ou $m(m-1)$, sera *réciproque*, et que par conséquent son degré pourra s'abaisser à $\frac{1}{2}m(m-1)$.

Nota. On supprimera les m solutions égales à l'unité en retranchant membre à membre les deux équations $F(xy)=0$ et $F(x)=0$; l'équation résultante

$$F(xy)-F(x)=0$$

sera satisfaite par $y=1$, et son premier membre pourra par conséquent être divisé par $y-1$; on ôtera ainsi les solutions égales à l'unité et correspondantes aux m racines de l'autre équation $F(x)=0$.

196. Problème. *Trouver l'équation aux produits deux à deux des racines de l'équation du* m^{ième} *degré*, $F(x)=0$.

Désignant par x_1, x_2, deux racines quelconques de $F(x)=0$, on aura l'équation cherchée en y, en éliminant x_1 et x_2, entre les équations

$$F(x_1)=0,\ F(x_2)=0,\ x_1x_2=y.$$

Tirant de la dernière $x_1=\dfrac{y}{x_2}$, et reportant dans la première, il restera à

$$\text{éliminer } x_2 \text{ entre } F\left(\frac{y}{x_2}\right)=0 \quad\text{et}\quad F(x_2)=0,$$

$$\text{ou } x \text{ entre } F\left(\frac{y}{x}\right)=0 \quad\text{et}\quad F(x)=0.$$

L'équation finale sera encore du degré m^2, et aura m racines qui seront les carrés des racines, $x_1, x_2, \ldots, x_m$. On pourra donc les supprimer, en formant une équation qui ait pour racines les carrés de celles de la proposée; ce qui se fera en substituant $\sqrt{x}$ à x dans cette dernière; puis on divisera le premier membre de l'équation finale par le premier membre de cette transformée. De plus, les racines restantes seront égales deux à deux, puisque $x_1\times x_2$ et $x_2\times x_1$ sont deux valeurs de y; on pourra donc extraire la racine carrée du premier membre, et le degré de l'équation demandée sera ainsi réduit à $\frac{1}{2}m(m-1)$.

Nota. Pour supprimer de suite les carrés des racines de la proposée, on retranchera encore l'une de l'autre les deux équations $F\left(\frac{y}{x}\right)=0$, $F(x)=0$; l'équation résultante $F\left(\frac{y}{x}\right)-F(x)=0$ sera satisfaite évidemment par $y=x^2$, donc elle sera divisible par $y-x^2$; et supprimant ce facteur, on ôtera les m solutions égales à x^2, qui correspondront à $F(x)=0$.

197. Problème. *Etant donnée une équation* $F(x)=0$, *dont*

x_1, x_2 *désignent deux racines quelconques, en trouver une autre dont les racines soient toutes les combinaisons de la forme* $p(x_1+x_2)+qx_1x_2$; p *et* q *étant des constantes données.*

Tout se réduira à éliminer x_1 et x_2 entre les trois équations

$$F(x_1)=0,\quad F(x_2)=0,\quad p(x_1+x_2)+qx_1x_2=y.$$

Tirant x_2 de la dernière, on aura $x_2=\dfrac{y-px_1}{p+qx_1}$.

Reportant dans la seconde, il restera à éliminer x_1 entre

$$F(x_1)=0 \quad\text{et}\quad F\left(\frac{y-px_1}{p+qx_1}\right)=0,$$

ou x entre

$$F(x)=0 \quad\text{et}\quad F\left(\frac{y-px}{p+qx}\right)=0.$$

Le nombre des combinaisons de la forme donnée étant m^2, lorsque x_1 et x^2 passent successivement par les m valeurs de x tirées de $F(x)=0$, il s'ensuit que l'équation finale sera encore du degré m^2. On en pourra supprimer m solutions de la forme $2px+qx^2$, en formant une nouvelle équation qui ait ses racines de cette forme, ce qui se fera en éliminant x entre $F(x)=0$ et $2px+qx^2=z$. Quand on aura trouvé l'équation en z, on y remplacera z par x, et on divisera par elle l'équation finale, qui ne sera plus que du degré $m(m-1)$. Enfin, on la réduira au degré $\frac{1}{2}m(m-1)$, en observant que ses racines seront égales deux à deux, et que par conséquent on pourra extraire la racine carrée de son premier membre.

Nota. Il sera encore possible de supprimer d'avance les m solutions de la forme $2px+qx^2$; en effet, si l'on retranche l'une de l'autre les deux équations entre lesquelles il faut éliminer x, on pourra leur substituer le système des deux suivantes :

$$F\left(\frac{y-px}{p+qx}\right)-F(x)=0,\quad\text{et}\quad F(x)=0.$$

Or, la première est identiquement satisfaite quand on y fait

$$\frac{y-px}{p+qx}=x, \quad \text{ou} \quad y=2px+qx^2;$$

donc son premier membre est divisible par $y-2px-qx^2$; et supprimant ce facteur, on retranchera de l'équation finale les m^2 solutions de la forme $2px+qx^2$.

198. Problème. *Trouver la condition pour qu'une équation*

$$x^m+Ax^{m-1}+\ldots+Tx+U=0,$$

ait deux racines égales et de signes contraires, et déterminer ces racines.

Soient x_1 et $-x_1$ les deux racines inconnues dont il est question, il faudra, lorsque m sera pair, que l'on ait à la fois les deux équations

$$x_1^m+Ax_1^{m-1}+Bx_1^{m-2}+\ldots+Tx_1+U=0,$$
$$x_1^m-Ax_1^{m-1}+Bx_1^{m-2}+\ldots-Tx_1+U=0.$$

Les ajoutant et les retranchant membre à membre, il faudra, pour qu'elles aient lieu en même temps, que l'on ait séparément,

$$(1)\ldots x_1^m+Bx_1^{m-2}+\ldots+U=0,$$
$$(2)\ldots Ax_1^{m-1}+Cx_1^{m-3}+\ldots+Tx_1=0.$$

La valeur de x_1 doit donc satisfaire à ces deux équations, et la condition de possibilité est qu'elles aient une solution commune; on cherchera alors le commun diviseur entre leurs premiers membres, et on égalera à zéro le reste indépendant d'x; cette équation sera la condition pour que la proposée ait deux racines égales et de signes contraires, et le commun diviseur, égalé à zéro, donnera la valeur de cette racine.

On observera qu'on peut supprimer le facteur x_1 dans l'équation (2), car $x_1=0$, ne saurait satisfaire à l'équation (1), parce qu'il faudrait que U fût nul, et l'équation proposée serait bien satisfaite par ± 0; mais il n'y aurait pas pour cela deux racines égales et de signes contraires; il n'y en aurait qu'une seule égale à zéro. Si cependant U et T étaient nuls à la fois, on aurait deux racines égales et de signes contraires, puis-

qu'elles seraient nulles toutes les deux ; mais si l'on ne spécifie pas que les racines en question sont nulles, on pourra supprimer le facteur x_1 de l'équation (2), et exprimer qu'il y a une solution commune après cette suppression. On aura ainsi la solution générale de la question. Si ensuite on demande que les racines dont il s'agit soient nulles, on égalera à zéro la valeur que l'on tirera pour elles, et on aura par là une seconde condition.

Si les équations (1) et (2) avaient n solutions communes, la proposée aurait n couples de racines égales deux à deux au signe près.

On opérerait d'une manière semblable si m était impair.

199. Problème. *Trouver deux racines d'une équation* $F(x)=0$, *connaissant leur différence* δ.

Si x_1 est la plus petite de ces racines, $x_1+\delta$ sera la plus grande, et l'on devra avoir

$$F(x_1)=0,\ F(x_1+\delta)=0.$$

Il devra donc exister un commun diviseur entre $F(x)$ et $F(x+\delta)$. S'il est du premier degré, il sera $x-x_1$, et fera connaître par conséquent la plus petite racine, et par suite la plus grande. S'il est du second degré, il y aura deux couples de racines ayant entre elles la différence δ ; ce qui donnera quatre racines, à moins que la proposée n'ait trois racines qui suivent une progression dont la différence soit δ ; c'est ce que l'on reconnaîtrait à ce que les deux racines du commun diviseur différeraient entre elles de δ. On raisonnerait semblablement dans le cas où ce commun diviseur serait d'un degré plus élevé.

200. Problème. *Trouver les conditions pour qu'une équation* $F(x)=0$, *ait* n *racines qui forment une progression arithmétique dont la raison soit* δ, *et déterminer ces racines.*

Soit $F(x)=0$ l'équation donnée, et x_1 la plus petite des n racines ; il faudra qu'on ait en même temps les n équations

$$F(x_1)=0, F(x_1+\delta)=0, F(x_1+2\delta)=0, \ldots, F[x_1+(n-1)\delta]=0.$$

Il devra donc y avoir un commun diviseur au moins du pre-

mier degré entre $F(x)$ et chacun des polynomes $F(x+\delta)$, $F(x+2\delta)$, ..., $F[x+(n-1)\delta]$, d'où résulteront $n-1$ équations de condition.

On parvient au même résultat par la méthode des coefficiens indéterminés, en exprimant que le polynome $F(x)$ a n facteurs de la forme

$$(x-x_1),\ (x-x_1-\delta),\ (x-x_1-2\delta),\ \ldots,\ [x-x_1-(n-1)\delta].$$

On agirait de la même manière dans le cas où les racines devraient être en progression par quotient.

201. Problème. *Trouver les conditions pour qu'une équation du degré* m *ait* n *racines égales entre elles.*

On égalera le premier membre de l'équation donnée au produit d'un facteur $(x-a)^n$ par un polynome indéterminé du degré $m-n$, il en résultera m équations, entre lesquelles on éliminera a et les $m-n$ coefficiens du polynome indéterminé, et il restera $n-1$ équations de condition entre les coefficiens de l'équation donnée.

Si, d'après la théorie des racines égales, on exprimait que le premier membre de la proposée et sa dérivée ont un commun diviseur du degré $n-1$, il en résulterait d'abord $n-1$ équations de condition ; mais il faudrait de plus que ce commun diviseur fût une puissance du degré $n-1$, d'où résulteraient $n-2$ équations de condition ; ce qui en ferait en tout $2n-3$. On en trouverait donc plus par ce moyen que par le premier, et cependant il semble qu'on n'a introduit aucune condition étrangère. Pour lever cette difficulté, observons que les $n-1$ équations qui expriment qu'il y a un commun diviseur du degré $n-1$ s'appliquent au cas général où les racines de ce diviseur sont inégales, et où l'on a par conséquent $n-1$ couples de racines égales deux à deux dans l'équation proposée. Si maintenant on exprime que les $n-1$ racines du commun diviseur sont égales, ces $n-1$ couples feront $2n-2$ racines égales dans la proposée. Le nombre $2n-3$ de conditions, tenait donc à ce que l'on exprimait que l'équation avait $2n-2$ racines égales, et non pas

seulement n ; ce qui s'accorde avec le premier procédé, par les coefficiens indéterminés.

202. Théorème. *Si toutes les solutions d'une équation à deux variables* (1)...$\phi(x,y)=0$, *satisfont à une autre équation* (2)...$F(x,y)=0$, *le polynome* $F(x,y)$ *sera divisible par* $\phi(x,y)$, *en supposant que ces polynomes sont entiers et rationnels.*

En effet, concevons qu'on attribue à y une même valeur quelconque dans les deux équations; l'équation (2) devra admettre en même temps toutes les valeurs d'x correspondantes de l'équation (1); le polynome $F(x,y)$ sera donc divisible par $\varphi(x,y)$, quand on l'aura multiplié, s'il est nécessaire, par une certaine puissance du coefficient du terme qui est du plus fort degré en x dans $\phi(x,y)$, laquelle peut être une fonction $\psi(y)$ de y. Ainsi le produit $\psi(y)\,F(x,y)$ est divisible par $\phi(x,y)$, quels que soient x, y, et le quotient de $F(x,y)$ par $\varphi(x,y)$ deviendrait entier par rapport à x et y, si on le multipliait par $\psi(y)$.

En raisonnant pour x comme pour y, nous ferions voir que le produit $\psi_1(x)\,F(x,y)$ serait divisible par $\phi(x,y)$, et que par conséquent le quotient de $F(x,y)$ par $\phi(x,y)$ deviendrait encore entier si on le multipliait par $\psi_1(x)$. D'où il suit enfin que ce quotient de $F(x,y)$ par $\phi(x,y)$ est entier par rapport à x et à y; car sans cela il ne pourrait le devenir, quand on le multiplierait indifféremment par une fonction d'x seulement, ou d'y seulement.

203. Théorème. *Soit une équation* (1)...$\phi(x,y)=0$ *du degré* m *en* x, *et du degré* n *en* y; *si l'équation* (2)...$F(x,y)=0$ *admet toutes les solutions de* $\varphi(x,y)=0$ *correspondantes à* m *valeurs de* x, *et à* n *valeurs d'*y, *le polynome* $F(x,y)$ *sera divisible par* $\phi(x,y)$, *en supposant ces deux polynomes rationnels et entiers.*

Soient en effet $x_1, x_2, \ldots, x_m$, les m valeurs d'x données : puisque pour chacune d'elles l'équation (2) admet toutes les solutions en y de l'équation (1), il s'ensuit que pour ces mêmes valeurs d'x, $F(x,y)$ est divisible par $\varphi(x,y)$, quand on l'aura multiplié par une puissance $\psi(x)$ du coefficient du terme du plus haut degré en y dans $\phi(x,y)$. Le reste de la division de

$\psi(x)\times F(x,y)$ par $\varphi(x,y)$ sera donc nul pour les m valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Mais ce reste ne peut être que du degré $m-1$ puisque le diviseur est du degré m; donc il est nul quel que soit x, et par conséquent la division de $\psi(x)\times F(x,y)$ par $\varphi(x,y)$ réussit quels que soient x et y. La démonstration s'achèvera comme dans le théorème précédent, et l'on en conclura semblablement que $F(x,y)$ est divisible par $\varphi(x,y)$.

204. Théorème. *Si l'équation* $F(x,y)=0$ *admet toutes les solutions de* $\varphi(x,y)=0$, *quand* x *ou* y *prennent des valeurs quelconques entre deux limites données, le polynome* $F(x,y)$ *sera divisible par* $\varphi(x,y)$.

Ce théorème est une conséquence du précédent; car quelque rapprochées que soient les deux limites entre lesquelles on peut prendre x arbitrairement, cette variable étant susceptible de recevoir une infinité de valeurs, en pourra prendre par conséquent un nombre supérieur au degré de $\varphi(x,y)$, par rapport à x; il en serait de même pour y.

205. Théorème. *Si deux équations* $F(x,y)=0$ et $\varphi(x,y)=0$, *admettent au moins une solution commune pour une infinité de valeurs de l'une des variables, de* x, *par exemple; et qu'en même temps* $\varphi(x,y)$ *n'admette aucun facteur rationnel en* x *ou en* y; *le polynome* $F(x,y)$ *sera divisible par* $\varphi(x,y)$.

En effet, si on élimine y entre les deux équations, par le procédé du plus grand commun diviseur, on parviendra au reste final en x, qui, égalé à zéro, devra, d'après l'hypothèse, admettre une infinité de solutions; il faudra donc qu'il soit nul de lui-même; il existera donc un commun diviseur entre $F(x,y)$ et $\varphi(x,y)$. Mais on suppose que $\varphi(x,y)$ n'admet aucun autre facteur rationnel que lui-même; ces conditions ne pourront être satisfaites à la fois que si $\varphi(x,y)$ est facteur dans $F(x,y)$.

Corollaire. Il en résulte que si deux équations à deux variables ont une infinité de solutions communes, et que leurs premiers membres soient indécomposables en facteurs rationnels, ces équations seront identiques.

Ainsi, *l'équation rationnelle d'un arc de courbe, quelque petit qu'il soit, est identique avec l'équation de la courbe en-*

tière. C'est pour cela qu'en cherchant les équations des lieux géométriques, on trouve souvent des branches de courbes étrangères à la question : c'est qu'alors la construction ne fournissait qu'une partie du lieu de tous les points compris dans la même équation rationnelle, et que l'équation de cette partie est la même que celle du lieu total.

Si, par exemple, on demandait le lieu des milieux des cordes menées à un cercle, par un point extérieur, on trouverait l'équation d'un cercle, tandis que la construction ne fournit que l'arc intercepté par le cercle donné.

Des Equations binomes.

Ces équations peuvent toujours se ramener à la forme $y^{m+n} \mp py^n = 0$. Supprimant les n solutions égales à zéro, il vient $y^m \mp p = 0$.

Désignant par α la valeur arithmétique de $\sqrt[m]{p}$, et faisant $y = \alpha x$, l'équation précédente se réduit à (1). . . $x^m \mp 1 = 0$.

Les m valeurs de y s'obtiendront en multipliant successivement α par chacune des m valeurs de x, tirées de l'équation (1). Ces valeurs de x sont nommées racines de l'unité.

L'équation (1) *n'a jamais de racines égales*, car il n'y a pas de commun diviseur entre $x^m \mp 1$ et sa dérivée mx^{m-1}.

206. THÉORÈME. *Quand* m *et* n *sont premiers entre eux, les équations* $x^m - 1 = 0$, $x^n - 1 = 0$, *n'ont pas d'autre solution commune que* $x = 1$.

En effet, si l'on divise $x^m - 1$ par $x^n - 1$, on aura pour dividendes partiels consécutifs,

$$x^{m-n} - 1,\ x^{m-2n} - 1,\ x^{m-3n} - 1,\ \text{etc.}$$

Le dernier reste sera donc $x^p - 1$, p étant le reste de la division de m par n. Le plus grand commun diviseur entre $x^m - 1$ et $x^n - 1$, sera donc le même qu'entre $x^n - 1$ et $x^p - 1$; de même ce dernier sera identique avec celui de $x^p - 1$ et $x^q - 1$,

q étant le reste de la division de n par p. En continuant ainsi, on parviendra à un reste du premier degré en x, puisque les exposans m et n sont premiers entre eux et que les quantités p, q, etc., sont les restes successifs qu'on obtient en cherchant le plus grand commun diviseur de m et n. Par conséquent, le commun diviseur de $x^m - 1$ et $x^n - 1$ est $x - 1$; et par suite l'unité est la seule racine commune aux deux équations proposées.

207. Voyons maintenant à quoi l'on peut réduire la *résolution de l'équation* $x^m - 1 = 0$.

Supposons d'abord que le nombre m soit premier; dans ce cas, toutes les puissances de α jusqu'à α^m auront des valeurs différentes, à moins que l'on n'ait $\alpha = 1$. Car si deux puissances α^n et α^ν étaient égales, on aurait $\alpha^n = \alpha^\nu$, et de là $\alpha^{n-\nu} = 1$; or aucune puissance de α moindre que m ne peut être $= 1$ tant que α n'est pas $= 1$. En effet, puisque $\alpha^m - 1 = 0$, si l'on avait en même temps $\alpha^{n'} - 1 = 0$, n' étant $< m$, il faudrait que ces deux équations eussent une racine commune; et en cherchant par les règles ordinaires, le plus grand commun diviseur des deux quantités $\alpha^m - 1$ et $\alpha^{n'} - 1$, on trouve nécessairement $\alpha - 1$ pour ce diviseur, à cause que m est un nombre premier; de sorte que la racine commune aux deux équations $\alpha^m - 1 = 0$ et $\alpha^{n'} - 1 = 0$ ne peut être que l'unité.

Il suit de là, 1°. que les puissances $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots, \alpha^m$, représentent toutes les racines de l'équation $y^m - 1 = 0$, en prenant pour α une quelconque des racines de cette équation, autre que l'unité. Car puisque $\alpha^m = 1$, on aura aussi $\alpha^{2m} = 1$, $\alpha^{3m} = 1$, etc.; de sorte que les puissances $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots, \alpha^m$ seront aussi des racines de la même équation; et comme elles sont au nombre de m, et ont toutes des valeurs différentes, elles donneront nécessairement toutes les racines de l'équation $y^m - 1 = 0$.

Il s'ensuit aussi, 2°. que si dans la série des puissances $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots, \alpha^{m-1}$, on substitue pour α une quelconque de ces puissances (comme α^n, n étant $< m$) la nouvelle série α^n, α^{2n}, α^{3n}, etc., en rabaissant toutes les puissances au-dessous de α^m, à cause de $\alpha^m = 1$, contiendra encore les mêmes puissances,

mais dans un ordre différent; car il est visible que tous les exposans n, $2n$, $3n$, etc., sont différens, et que leurs restes de la division par m le sont aussi, parce que m est un nombre premier; de sorte que ces restes étant au nombre de m, et tous différens entre eux, ne peuvent être que les nombres $1, 2, 3, 4, 5, \ldots, m-1, m$.

208. Considérons maintenant le cas où m n'est pas un nombre premier. Alors, si n est un diviseur de m, toutes les racines de l'équation $y^n - 1 = 0$ seront communes à l'équation $y^m - 1 = 0$, parce qu'en supposant le nombre r racine de l'équation $y^n - 1 = 0$, on aura $r^n = 1$, et par conséquent aussi $r^m = 1$; de sorte que r sera aussi racine de l'équation $y^m - 1 = 0$. En faisant donc $\alpha = r$, on aura $\alpha^m = 1$; et si $m = np$, il est visible que dans la série des puissances $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots, \alpha^m$, chacune se trouvera répétée p fois; par conséquent ces puissances ne pourront plus représenter toutes les racines de l'équation $y^m - 1 = 0$, parce que cette équation n'a jamais de racines égales.

Soit $m = pq$, p et q étant deux nombres premiers, et soit β une des racines de l'équation $y^p - 1 = 0$, et γ une des racines de l'équation $y^q - 1 = 0$, il est clair que β et γ seront aussi racines de l'équation $y^m - 1 = 0$, parce que β^p et γ^q étant $= 1$, on aura aussi $\beta^{pq} = 1$, $\gamma^{pq} = 1$; mais toutes les racines de l'équation $y^m - 1 = 0$ ne pourront pas être représentées par les puissances successives des racines β et γ.

On voit aussi que le produit $\beta\gamma$ sera racine de la même équation $y^m - 1 = 0$; mais aucune puissance de cette racine, dont l'exposant serait inférieur à m, ne pourra être égale à l'unité, à moins que β ou γ ne soit l'unité; car il faudrait que l'exposant de cette puissance fût un diviseur de m, et par conséquent égal à p ou à q; on aurait donc $(\beta\gamma)^p = 1$, ou $(\beta\gamma)^q = 1$. Dans le premier cas, on aurait $\gamma^p = 1$, à cause de $\beta^p = 1$ (hyp.); et comme on a déjà $\gamma^q - 1 = 0$ (hyp.), il en résulterait $\gamma - 1 = 0$, à cause que p et q sont premiers entre eux. Dans le second cas, on aurait $\beta - 1 = 0$.

Ainsi, tant que β et γ sont différens de l'unité, la racine $\beta\gamma$

de l'équation $y^m - 1 = 0$, a, lorsque $m = pq$, la même propriété que la racine α lorsque m est un nombre premier, savoir, que toutes les racines de cette équation peuvent être représentées par les puissances successives de $\beta\gamma$.

Comme les valeurs de β sont au nombre de p, et celles de γ au nombre de q, les valeurs de $\beta\gamma$ seront au nombre de pq, c'est-à-dire de m; et il est facile de prouver que ces valeurs seront toutes différentes entre elles, parce qu'elles peuvent être représentées par $\beta^r\gamma^s$, en faisant successivement $r = 1, 2, 3 \ldots, p$ et $s = 1, 2, 3 \ldots, q$, à cause que les nombres p et q sont supposés premiers. D'où il suit que p et q étant des nombres premiers, et m étant égal à pq, toutes les racines de l'équation $y^m - 1 = 0$ peuvent être représentées par les produits $\beta\gamma$ des racines des équations $y^p - 1 = 0$, $y^q - 1 = 0$.

On prouvera de même que si $m = pqr$, en supposant p, q, r des nombres premiers, et que β, γ, δ soient respectivement des racines quelconques des trois équations $y^p - 1 = 0$, $y^q - 1 = 0$, $y^r - 1 = 0$, le produit $\beta\gamma\delta$, en donnant successivement à β, γ, δ toutes leurs valeurs, pourra représenter toutes les racines de l'équation $y^m - 1 = 0$; et que celles de ces racines qui seront exprimées par $\beta\gamma\delta$ en excluant l'unité des valeurs β, γ, δ, auront les mêmes propriétés que les racines de l'équation $y^m - 1 = 0$, lorsque m est un nombre premier.

Et ainsi de suite.

209. Mais si l'on avait $m = p^2$, p étant un nombre premier, en prenant β pour une quelconque des racines de l'équation $y^p - 1 = 0$, il est clair que β serait aussi racine de l'équation $y^m - 1 = 0$, et que $\sqrt[p]{\beta}$ le serait aussi. On prendrait donc, dans ce cas, pour γ une quelconque des valeurs de $\sqrt[p]{\beta}$, et l'on aurait également $\beta\gamma$ ou $\beta\sqrt[p]{\beta}$ pour l'expression de toutes les racines de $y^m - 1 = 0$. Et en effet, en donnant à β les p valeurs dont il est susceptible, on aura p^2 valeurs pour $\beta\sqrt[p]{\beta}$; de plus elles seront différentes; car si l'on avait pour deux d'entre elles $\beta\sqrt[p]{\beta} = \beta'\sqrt[p]{\beta'}$,

il s'ensuivrait, en élevant les deux membres à la puissance p; $\beta^{p+1}=\beta'^{p+1}$, d'où $\beta=\beta'$, puisque $\beta^p=1$ et $\beta'^p=1$.

Les p^2 valeurs de $\beta\sqrt[p]{\beta}$ seront donc différentes quand on donnera à β les p valeurs différentes tirées de $y^p-1=0$.

De même, si $m=p^3$, en conservant les valeurs de β et γ, on ferait de plus $\delta=\sqrt[p^2]{\beta}$, et l'on aura $\beta\gamma\delta$ pour l'expression de toutes les racines de $y^m-1=0$, en donnant successivement à β, γ, δ toutes leurs valeurs.

Et ainsi de suite.

Donc en général, si $m=p^\mu q^\nu r^\pi \ldots$, et que β, γ, δ, etc., soient respectivement des racines quelconques des équations $y^p-1=0$, $y^q-1=0$, $y^r-1=0$, etc., p, q, r, etc., étant des nombres premiers; si l'on fait de plus $\beta'=\sqrt[p]{\beta}$, $\beta''=\sqrt[p]{\beta'}$, etc. $\gamma'=\sqrt[q]{\gamma}$, $\gamma''=\sqrt[q]{\gamma'}$, etc., $\delta'=\sqrt[r]{\delta}$, $\delta''=\sqrt[r]{\delta'}$, etc., on aura

$$\beta\beta'\beta''\ldots\times\gamma\gamma'\gamma''\ldots\times\delta\delta'\delta''\ldots$$

pour l'expression générale des racines de l'équation $y^m-1=0$; en donnant successivement à β, β', etc., γ, γ', etc., δ, δ', etc., toutes les valeurs dont ces quantités sont susceptibles chacune en particulier.

On voit par là que pour avoir les racines de l'équation à deux termes $y^m-1=0$, lorsque m n'est pas un nombre premier, il suffit de résoudre des équations semblables des degrés dont les exposans soient les nombres premiers qui composent le nombre m.

210. Enfin nous remarquerons que comme l'équation $y^m-1=0$ manque de tous les termes intermédiaires, si l'on nomme $1, \alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc., ses racines, on aura

$$\begin{gathered}1+\alpha+\beta+\gamma+\delta+\text{etc.}=0,\\1+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\text{etc.}=0,\\1+\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3+\text{etc.}=0.\\\vdots\\1+\alpha^{m-1}+\beta^{m-1}+\gamma^{m-1}+\delta^{m-1}+\text{etc.}=0.\end{gathered}$$

Ensuite, à cause de $\alpha^m = 1$, $\beta^m = 1$, etc., on aura

$$1 + \alpha^m + \beta^m + \gamma^m + \delta^m + \text{etc.} = m,$$
$$1 + \alpha^{m+1} + \beta^{m+1} + \gamma^{m+1} + \text{etc.} = 0,$$
$$1 + \alpha^{m+2} + \beta^{m+2} + \gamma^{m+2} + \text{etc.} = 0,$$

et ainsi de suite.

Pour résoudre l'équation $x^m - 1 = 0$, quand m est premier, on supprimera d'abord le facteur $x - 1$, et il restera l'équation réciproque $x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + x + 1 = 0$ qui se ramènera comme on sait à une autre de degré moitié moindre.

M. Gauss a fait connaître une méthode au moyen de laquelle on peut résoudre l'équation $x^m - 1 = 0$ à l'aide d'autant d'équations qu'il y a de facteurs premiers dans $m - 1$, et qui ne montent qu'aux degrés marqués par ces facteurs. Nous renvoyons à ce sujet à l'excellent ouvrage de M. Gauss, intitulé *Recherches arithmétiques.*

211. Problème. *Déduire les coefficiens de la puissance* m + 1 *d'un binome, de ceux de la puissance* m. Soit

$$(x + a)^m = x^m + Ax^{m-1}a + Bx^{m-2}a^2 + Cx^{m-3}a^3 + \text{etc.}$$

Si l'on multiplie le second membre par $x + a$, on aura la puissance $m + 1$ de $x + a$; les deux produits partiels seront

$$x^{m+1} + Ax^m a + Bx^{m-1}a^2 + Cx^{m-2}a^3 + \ldots$$
$$+ \quad x^m a + Ax^{m-1}a^2 + Bx^{m-2}a^3 + \ldots$$

D'où l'on voit que *le coefficient d'un terme de rang quelconque s'obtiendra en ajoutant le coefficient du même rang dans la puissance* m *à celui qui le précède.*

Si l'on part de la première puissance, et qu'on dispose, dans une même colonne verticale, les coefficiens d'une même puissance, on formera ainsi le tableau suivant, qui a reçu le nom de *triangle arithmétique de* Pascal,

1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,	1,
1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,
	1,	3,	6,	10,	15,	21,	28,
		1,	4,	10,	20,	35,	56,
			1,	5,	15,	35,	70,
				1,	6,	21,	56,
					1,	7,	28,
						1,	8,
							1.

Problèmes sur le Calcul des différences.

212. Problème. *Si l'on a une fonction* $\varphi(x)$, *et qu'on y remplace* x *par* $x+h$, *on obtiendra une différence* $\varphi(x)-\varphi(x+h)$. *Si l'on cherche de même la différence de cette différence, en y faisant croître* x *de la même quantité* h, *et que l'on prenne ainsi* m *différences successives, on demande l'expression de la* m^{ième} *différence en fonction des différentes valeurs*

$$\varphi(x),\ \varphi(x+h),\ \varphi(x+2h),\ \ldots,\ \varphi(x+mh).$$

Soit représentée par y la fonction donnée $\varphi(x)$, et par $y_1, y_2, \ldots, y_m$, ce qu'elle devient quand on y remplace x par $x+h$, $x+2h$, ..., $x+mh$. On aura, en désignant par $\Delta y, \Delta^2 y, \Delta^3 y, \ldots, \Delta^m y$, les différences successives,

$$\Delta y = y - y_1,$$
$$\Delta^2 y = (y-y')-(y_1-y_2) = y - 2y_1 + y_2,$$
$$\Delta^3 y = (y-y_1)-2(y_1-y_2)+(y_2-y_3) = y - 3y_1 + 3y_2 - y_3.$$

En continuant ainsi, on trouverait toujours des termes alternativement positifs et négatifs, et ayant pour coefficiens ceux de la puissance d'un binome du même degré que la différence que l'on considérerait.

Il est d'ailleurs facile de démontrer la généralité de cette loi. Supposons, en effet, qu'elle ait lieu pour la différence de l'ordre n, on aura

$$\Delta^n y = y - ny_1 + \frac{n(n-1)}{1.2} y_2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.} y_3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} y_4 - \dots$$

D'où, en prenant la différence suivante,

$$\Delta^{n+1} y = \begin{cases} (y-y_1) - n(y_1-y_2) + \frac{n(n-1)}{1.2}(y_2-y_3) \frac{-n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(y_3-y_4) \\ + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}(y_4-y_5) - \dots \end{cases}$$

On voit que chaque terme de $\Delta^n y$ se retrouvera dans $\Delta^{n+1} y$ et fournira un terme de même ordre et de même signe que le suivant, et qu'ainsi les signes seront encore alternativement positifs et négatifs, et que de plus chaque coefficient s'obtiendra en ajoutant celui du même rang dans $\Delta^n y$ avec le précédent; d'où il suit, d'après la proposition précédente, que les coefficiens de $\Delta^{n+1} y$ seront ceux de la puissance $n+1^{ème}$ d'un binome; et que par conséquent la loi observée pour les trois premières différences, a lieu indéfiniment. On a donc pour l'ordre m

$$\Delta^m y = y - my_1 + \frac{m(m-1)}{1.2} y_2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} y_3 - \text{etc.}$$

213. Problème. *Calculer la différence m^ième d'un polynome entier et rationnel du degré m en x.*

On commencera par observer que la différence d'un polynome entier et rationnel, est toujours d'un degré moindre d'une unité que ce polynome, et que la différence d'une constante, c'est-à-dire d'une quantité indépendante d'x, est nulle. Cela posé, il est évident que le seul terme du degré m pourra influer sur la différence de l'ordre m, et que, par conséquent, on pourra dans le cas proposé, supposer le polynome réduit à son premier terme Ax^m. Or, la différence de Ax^m sera un polynome complet du degré $m-1$, dont il faudra prendre la différence de l'ordre $m-1$, et que l'on pourra, par conséquent, encore réduire à son premier terme $Amx^{m-1}h$. On verrait sem-

blablement que dans la seconde différence, il faudra se borner à considérer le premier terme; et ainsi de suite, jusqu'à la différence de l'ordre m. Ces premiers termes seront successivement :

$$Amx^{m-1}h,$$
$$Am(m-1)x^{m-2}h^2,$$
$$Am(m-1)(m-2)x^{m-3}h^3, \ldots,$$
$$Am(m-1)(m-2)\ldots 3.2.1.h^m.$$

La différence de l'ordre m d'un polynome de la forme

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} \ldots + Tx + U,$$

est donc constante et égale à $A.1.2.3\ldots m.h^m$, et ses différences d'un ordre plus élevé sont nulles.

Si l'on fait $A=1$ et $h=1$, la différence $m^{ième}$ se réduit à

$$1.2.3\ldots m.$$

1er. Corollaire. Si l'on dispose sur une ligne horizontale les différentes valeurs $y, y_1, y_2, \ldots, y_m$, que reçoit une fonction d'x, quand on y remplace x par x, $x+h$, $x+2h, \ldots, x+mh$, et qu'on retranche tous les termes de cette ligne l'un de l'autre, dans le même ordre, on aura les différences premières de chacun d'eux; si l'on retranche ensuite ces différences les unes des autres dans le même ordre, on obtiendra les différences secondes de $y, y_1, y_2, \ldots$. Et en continuant ainsi jusqu'à l'ordre m, on trouvera des différences égales pour tous les termes, si y est une fonction entière rationnelle du degré m.

Si par exemple on suppose $y=x^3$ et $h=1$, et que l'on commence par $x=1$, on formera ainsi le tableau suivant, où la ligne des différences troisièmes ne renferme que des termes égaux entre eux, et à $1.2.3$,

1,	8,	27,	64,	125,	216,	343,	512,...
7,	19,	37,	61,	91,	127,	169,...	
12,	18,	24,	30,	36,	42,...		
6,	6,	6,	6,	6,...			

2e Corollaire. Si dans la valeur de $\Delta^m y$ tirée du problème

précédent, on remplace y par x^m, et que l'on fasse ensuite $x = m$, on aura

$$\Delta^m y = m^m - m(m+h)^m + \frac{m(m-1)}{1.2}(m+2h)^m - \text{etc.}$$

Or, nous venons de voir qu'on avait

$$\Delta^m y = 1.2.3\ldots mh^m.$$

D'où suit cette identité, en faisant $h = 1$,

$$1.2.3\ldots m = \left\{\begin{array}{l} m^m - m(m+1)^m + \frac{m(m-1)}{1.2}(m+2)^m \\ -\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}(m+3)^m + \ldots \end{array}\right\}.$$

Si l'on faisait $h = -1$, on aurait, quand m serait pair,

$$1.2.3\ldots m = \left\{\begin{array}{l} m^m - m(m-1)^m + \frac{m(m-1)}{1.2}(m-2)^m \\ -\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}(m-3)^m \ldots \end{array}\right\}.$$

Et si m était impair, on aurait

$$-1.2.3\ldots m = \left\{\begin{array}{l} m^m - m(m-1)^m + \frac{m(m-1)}{1.2}(m-2)^m \\ -\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}(m-3)^m + \ldots \end{array}\right\}.$$

Théorèmes sur les Nombres premiers.

214. Théorème. *Si le produit* AB *est divisible par un nombre* P *premier avec* B, *le facteur* A *sera divisible par* P.

En effet, le plus grand commun diviseur de B et P, étant par hypothèse l'unité, on déduit de la théorie élémentaire du plus grand commun diviseur, que celui de AB et AP sera A, et que P divisant AB et AP, divisera leur plus grand commun diviseur A.

Corollaire. Les principales conséquences de ce théorème fondamental sont exposées dans tous les traités élémentaires. On

en déduit, par exemple, la manière de décomposer un nombre en ses facteurs premiers, d'où l'on peut conclure un moyen de déterminer tous les diviseurs d'un nombre. Soit en effet $\alpha^m \mathcal{C}^n \gamma^p$ etc. le nombre proposé ($\alpha, \mathcal{C}, \gamma, \ldots$, étant des nombres premiers), tout diviseur de ce nombre sera de la forme $\alpha^\mu \mathcal{C}^\nu \gamma^\pi \ldots$, les exposans $\mu, \nu, \pi, \ldots$, ne peuvent surpasser $m, n, p, \ldots$; d'où il suit que tous les diviseurs du nombre proposé, seront les différens termes du produit des facteurs

$$(1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^m),\ (1+\mathcal{C}+\mathcal{C}^2+\ldots+\mathcal{C}^n),$$
$$(1+\gamma+\gamma^2+\ldots+\gamma^p),\ldots.$$

Le nombre de ces diviseurs est $(m+1)(n+1)(p+1)\ldots.$

La somme de ces diviseurs peut se mettre sous la forme

$$\left(\frac{\alpha^{m+1}-1}{\alpha-1}\right)\times\left(\frac{\mathcal{C}^{n+1}-1}{\mathcal{C}-1}\right)\times\frac{\gamma^{p+1}-1}{\gamma-1}\times\ldots$$

On en déduit le moyen de trouver un nombre qui ait un nombre donné p de diviseurs. On décomposera p en facteurs quelconques; on diminuera chacun d'eux d'une unité, et l'on prendra ces nombres pour exposans de facteurs premiers arbitraires; il en résultera un nombre qui admettra p diviseurs.

Il suit encore de là que tout carré admet un nombre impair de diviseurs; car tous les exposans de ses facteurs premiers étant pairs, le produit $(m+1)(n+1)(p+1)\ldots$ est impair.

Si l'on demandait de combien de manières le nombre $N=\alpha^m \mathcal{C}^n \gamma^p\ldots$, peut se décomposer en deux facteurs, on trouverait $\frac{1}{2}(m+1)(n+1)(p+1)\ldots$, parce que à chaque facteur A correspond l'inverse $\frac{N}{A}$, et que par conséquent le nombre des produits de deux facteurs différens, est la moitié de celui des diviseurs. Il faut en excepter le cas où le nombre N serait un carré; alors le nombre des diviseurs est impair, parce que la racine carrée se correspond à elle-même pour donner le produit N; d'où il suit que dans ce cas il faut prendre la moitié du nombre des diviseurs diminué de l'unité, et ajouter 1 au résultat; c'est-à-

dire que le nombre des manières de décomposer un carré en deux facteurs, est $\frac{1}{2}\left\{(m+1)(n+1)(p+1)\ldots+1\right\}$.

La formule précédente $\frac{1}{2}(m+1)(n+1)(p+1)\ldots$. pourrait encore être employée en prenant l'unité au lieu de la fraction $\frac{1}{2}$ que donnerait la division de $(m+1)(n+1)(p+1)\ldots$ par 2.

Si l'on voulait que les deux facteurs dans lesquels on décompose N, fussent premiers entre eux, le nombre des combinaisons ne dépendrait plus des exposans m, n, p, ..., et serait le même que si l'on avait $N=\alpha 6\gamma\ldots$; d'où il suit qu'en appelant k le nombre des facteurs premiers α, 6, γ, ..., on aurait pour le nombre des diviseurs $\frac{1}{2}(1+1)(1+1)(1+1)\ldots$, ou $\frac{1}{2}\times 2^k$, ou enfin 2^{k-1}.

215. Problème. *Trouver combien il y a de nombres premiers avec un nombre donné* N *et inférieurs à* N.

1°. Supposons d'abord $N=\alpha M$, α étant un nombre premier et M un facteur quelconque qui peut être divisible par une puissance quelconque de α. Les termes de la suite $1, 2, 3, \ldots, N$, qui sont divisibles par α, sont α, 2α, 3α, ..., $M\alpha$; en appelant donc x le nombre des termes de la première suite, qui ne sont pas divisibles par α, on aura

$$x=M\alpha-M=M(\alpha-1)=N\left(1-\frac{1}{\alpha}\right).$$

2°. Soit maintenant $N=\alpha 6 M$, α et 6 étant deux facteurs premiers différens, et M un nombre quelconque; on pourra distinguer dans la suite, $1, 2, 3, \ldots, N$, trois sortes de termes; les x termes premiers avec α et 6; ceux qui sont divisibles par α sans l'être par 6, ou par 6 sans l'être par α; et enfin ceux qui le sont par $\alpha 6$. Les termes divisibles par α sont au nombre de $\frac{N}{\alpha}$ ou $M6$; mais si l'on en ôte ceux divisibles par 6, leur nombre se réduira d'après le cas précédent à $M(6-1)$.

De même les termes divisibles par β, sans l'être par α, sont au nombre de $M(\alpha-1)$; et les termes divisibles par $\alpha\beta$ sont en nombre M. On aura donc

$$\alpha\beta M = x + M(\beta-1) + M, \\ + M(\alpha-1).$$

Or, le premier membre $\alpha\beta M$ peut être mis sous la forme

$$[1+(\alpha-1)][1+(\beta-1)]M,$$

et développant, d'après la loi connue du produit de binomes ayant même premier terme, on aura

$$M\left\{\begin{array}{l}1+(\alpha-1)+(\alpha-1)(\beta-1) \\ +(\beta-1)\end{array}\right\}.$$

Comparant avec le second membre de l'équation précédente, on trouvera

$$x = M(\alpha-1)(\beta-1) = N\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{\beta}\right).$$

3°. Soit $N = \alpha\beta\gamma M.$

On pourra distinguer dans la suite $1, 2, 3, \ldots, N$, quatre sortes de termes; les x termes premiers avec α, β, γ; les termes divisibles par un de ces facteurs seulement; ceux qui le sont par deux seulement; enfin ceux qui le sont par trois. Les termes divisibles par α sont au nombre de $\frac{N}{\alpha}$, ou de $M\beta\gamma$; mais si l'on ne considère parmi eux que ceux qui sont premiers avec β et γ, il n'en restera que $M(\beta-1)(\gamma-1)$, d'après ce qu'on a vu dans le cas précédent.

Les termes divisibles par $\alpha\beta$ sont au nombre de $\frac{N}{\alpha\beta}$ ou de $M\gamma$; mais en ne considérant que ceux qui sont premiers avec γ, leur nombre se réduit à $M(\gamma-1)$.

Enfin, les termes divisibles par $\alpha\beta\gamma$ sont au nombre de $\frac{N}{\alpha\beta\gamma}$,

ou de M. On aura donc,

$$\alpha\beta\gamma M = x + M(\beta-1)(\gamma-1) + M(\alpha-1) + M, \\ + M(\alpha-1)(\beta-1) + M(\beta-1), \\ + M(\alpha-1)(\gamma-1) + M(\gamma-1).$$

Considérant encore $\alpha\beta\gamma M$ comme le produit

$$[1+(\alpha-1)] \times [1+(\beta-1)] \times [1+(\gamma-1)] M,$$

et le comparant au second membre de l'équation précédente, on en conclura

$$x = M(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1) = N\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{\beta}\right)\left(1-\frac{1}{\gamma}\right).$$

On déduirait semblablement le cas de quatre facteurs premiers de celui de trois; et ainsi de suite. De sorte que les nombres premiers avec un nombre de la forme $N = \alpha^m\beta^n\gamma^p\delta^q \ldots$ et plus petits que N, sont en nombre marqué par

$$N\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{\beta}\right)\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\left(1-\frac{1}{\delta}\right)\ldots.$$

216. Problème. *Trouver combien de fois un nombre premier θ est facteur dans la suite 1, 2, 3, ... N; ou en d'autres termes, quelle est la plus forte puissance de θ qui divise le produit 1.2.3...N.*

Soit x le nombre de fois que θ est facteur dans $1.2.3\ldots N$, et désignons par $E\left(\frac{a}{b}\right)$ le plus grand entier compris dans $\frac{a}{b}$. Il est évident que $E\left(\frac{N}{\theta}\right)$ est le nombre des termes de la suite $1, 2, 3, \ldots, N$, qui sont divisibles par θ; que $E\left(\frac{N}{\theta^2}\right)$ est le nombre des termes de la même suite, qui sont divisibles par θ^2; et ainsi de suite. Or, il est évident que le nombre total des facteurs θ contenus dans le produit $1.2.3\ldots N$, est égal au nombre des termes qui contiennent une seule fois le facteur θ, plus le nombre de ceux qui le contiennent deux fois, plus le

nombre de ceux qui le contiennent trois fois; et ainsi de suite, jusqu'à ce que $\frac{N}{\theta^m}$ se trouve moindre que l'unité. On aura donc

$$x = E\left(\frac{N}{\theta}\right) + E\left(\frac{N}{\theta^2}\right) + E\left(\frac{N}{\theta^3}\right) + \text{etc.}$$

Si par exemple on cherche combien de fois 7 se trouve facteur dans le produit des nombres naturels 1, 2, 3, etc., jusqu'à 10000, on aura les opérations suivantes,

$$E\left(\frac{10000}{7}\right) = 1428,$$
$$E\left(\frac{10000}{7^2}\right) = E\left(\frac{1428}{7}\right) = 204,$$
$$E\left(\frac{10000}{7^3}\right) = E\left(\frac{204}{7}\right) = 29,$$
$$E\left(\frac{10000}{7^4}\right) = E\left(\frac{29}{7}\right) = 4,$$
$$E\left(\frac{10000}{7^5}\right) = E\left(\frac{4}{7}\right) = 0.$$

La somme de tous ces nombres étant 1665, laplus forte puissance de 7, qui divise le produit 1.2.3... 10000 est 7^{1665}.

Si l'on avait $N = \theta^m$, les nombres $E\left(\frac{N}{\theta}\right)$, $E\left(\frac{N}{\theta^2}\right)$...., seraient θ^{m-1}, θ^{m-2}, ..., 1, dont la somme est $\frac{\theta^m - 1}{\theta - 1}$ ou $\frac{N-1}{\theta-1}$.

217. *On n'a pas encore trouvé de formule qui donne tous les nombres premiers et qui n'en donne pas d'autres. On peut démontrer que si cette formule existe, elle ne saurait être une fonction entière et rationnelle d'une variable* x. Car, soit par exemple la formule $Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + ... + Tx + U$; et soit a une valeur d'x qui donne pour le polynome le nombre premier p; faisons $x = a + py$, y étant un nombre entier quelconque; le terme indépendant d'y, après la substitution, sera

$$Aa^m + Ba^{m-1} + ... + Ta + U,$$

ce qui est égal à p, et tous les autres termes renfermeront le facteur p; on aurait donc un nombre différent de p et divisible par p, et qui ne serait pas par conséquent un nombre premier. La formule $Ax^m \ldots + U$ ne peut donc renfermer uniquement des nombres premiers.

218. *La suite des nombres premiers est indéfinie.* Car soit p un nombre premier quelconque, le produit des nombres premiers, depuis 1 jusqu'à p, augmenté de l'unité, ne peut être divisé par aucun des nombres premiers, depuis 1 jusqu'à p; donc, ou il est premier, ou il admet des diviseurs premiers au-dessus de p. Donc enfin, quelque grand que soit un nombre premier, on en peut encore trouver un au-dessus; ce qui démontre la propriété énoncée.

219. Théorème. *Soit* p *un nombre premier, et* N *un nombre entier quelconque, non divisible par* p; *le nombre* $N^{p-1}-1$, *sera divisible par* p.

En effet, soit x un nombre entier quelconque, on aura

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{1.2}x^2 + \ldots$$
$$+ \frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-n+1)}{1\;.\;2\;.\;3\;\ldots\;n}x^n + \ldots + x^p.$$

Or, je dis que tous les termes du second membre, excepté le premier et le dernier, ont leurs coefficiens divisibles par p. Car soit le coefficient général

$$\frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-n+1)}{1\;.\;2\;.\;3\;\ldots\;n}.$$

Il est nécessairement entier; et comme p est premier, et que l'on a $n<p$, il s'ensuit que le facteur p du numérateur, ne peut détruire aucun des facteurs du dénominateur; ceux-ci sont donc détruits par les facteurs $(p-1)$, $(p-2)$, ..., $(p-n+1)$; et par conséquent p restera facteur du quotient. Donc.... $(1+x)^p-1-x^p$ est divisible par p, quel que soit l'entier x.

Posons maintenant $1+x=N$, on aura alors $N^p-(N-1)^p-1$, qui devra être divisible par p; donc N^p ne diffère de $(N-1)^p+1$

que par un multiple de p ; et en sous-entendant ce multiple, on aura

$$N^p = (N-1)^p + 1,$$

ou en retranchant N de part et d'autre,

$$N^p - N = (N-1)^p - (N-1).$$

Changeant N en N — 1, on aura semblablement

$$(N-1)^p - (N-1) = (N-2)^p - (N-2),$$

et de même

$$(N-2)^p - (N-2) = (N-3)^p - (N-3).$$

En continuant ainsi on arrivera à $(N-N)^p - (N-N)$ ou zéro. Donc $N^p - N$ est nul, en faisant abstraction de tous les multiples de p qu'il renferme. Donc enfin $N^p - N$ ou $N(N^{p-1}-1)$ est divisible par p.

D'où il suit que toutes les fois que N ne sera pas divisible par p, le nombre $N^{p-1}-1$ le sera. Ce qu'il fallait démontrer.

220. Théorème. *Si* n *est un nombre premier, le produit* 1, 2, 3, ..., n — 1, *augmenté de l'unité, sera divisible par* n; *et réciproquement, tout nombre qui satisfera à cette condition, sera premier.*

En effet, nous avons vu (page 216) que l'on avait, quel que fût le nombre pair m,

$$1.2.3\ldots m = \left\{ \begin{array}{l} m^m - m(m-1)^m + \dfrac{m(m-1)}{1.2}(m-2)^m \\ -\dfrac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}(m-3)^m + \ldots \end{array} \right\}.$$

Si l'on fait $m = n - 1$, et qu'on néglige les multiples de n, on aura par le théorème précédent

$$m^m = 1,\quad (m-1)^m = 1,\quad (m-2)^m = 1,\ldots$$

Donc le produit $1.2.3\ldots m$, en y négligeant les multiples de n, se réduit à

$$1 - m + \frac{m(m-1)}{1.2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \text{etc.},$$

le nombre de ces termes étant m; mais cette somme est le développement de $(1-1)^m$, moins son dernier terme qui est $+1$, parce que m étant égal à $n-1$, est pair. Donc, le produit $1.2.3\ldots m$, ou $1.2.3\ldots(n-1)$, est égal à un multiple de n, moins l'unité, et par conséquent $1.2.3\ldots(n-1)+1$ est divisible par n.

Réciproquement, il n'y a que les nombres premiers qui satisfassent à cette condition. En effet, si n est composé de deux facteurs inégaux, ils seront compris tous les deux dans la suite $1, 2, 3, \ldots, (n-1)$, et par conséquent le produit $1.2.3\ldots(n-1)$, serait divisible par n. De même, si n était le produit de deux facteurs égaux à a, on aurait $a < \frac{1}{2}(n-1)$, et par conséquent la suite $1, 2, 3, \ldots, (n-1)$, renfermerait a et $2a$, et le produit serait encore divisible par a^2 ou par n. Donc enfin la quantité $1.2.3\ldots(n-1)+1$ n'est divisible par n que quand n est premier.

Il résulte de là que pour s'assurer si un nombre est premier, il suffirait de voir si le produit des nombres naturels jusqu'à ce nombre exclusivement, donne -1 de reste, quand on le divise par ce même nombre. Mais ce produit devient tellement considérable quand n a une valeur un peu élevée, que ce moyen de vérification est réellement impraticable, et bien moins prompt que l'essai par la division. On peut cependant l'abréger, en substituant à la dernière moitié des facteurs $1, 2, 3, \ldots, (n-2), (n-1)$, leurs seconds termes $-1, -2, \ldots$; ce qui ne fait que retrancher du produit un multiple de n : alors les facteurs à égale distance des extrêmes, sont égaux et de signes contraires; de sorte que si $\frac{1}{2}(n-1)$ est pair, on pourra faire abstraction des signes $-$, et il faudra que ...... $\left\{1.2.3\ldots\frac{1}{2}(n-1)\right\}^2+1$ soit divisible par n; et si $\frac{n-1}{2}$ est impair, il faudra que

$$-\left\{1.2.3\ldots\frac{1}{2}(n-1)\right\}^2+1 \text{ ou } \left\{1.2.3\ldots\frac{1}{2}(n-1)\right\}^2-1,$$

soit divisible par n ; ce qui exige que l'un des deux facteurs

$$\left\{1.2.3\ldots\frac{1}{2}(n-1)+1\right\} \text{ ou } \left\{1.2.3\ldots\frac{1}{2}(n-1)-1\right\},$$

soit divisible par n. Ainsi, en divisant $1.2.3\ldots\frac{1}{2}(n-1)$ par n, quand $\frac{1}{2}(n-1)$ est impair, il faudra pour que n soit premier que l'on trouve $+1$ ou -1 pour reste.

Recherche des valeurs singulières que prennent dans certains cas les fonctions d'une seule variable.

On ne connaît pas de règles générales au moyen desquelles on puisse, dans tous les cas, déterminer les valeurs des fonctions qui se présentent sous une forme illusoire quand on donne à la variable dont elles dépendent, certaines valeurs particulières. Nous nous bornerons à faire connaître deux théorèmes au moyen desquels on peut, dans un grand nombre de cas, déterminer les valeurs singulières que prennent les fonctions de la forme

$$\frac{f(x)}{x}, \quad [f(x)]^{\frac{1}{x}},$$

lorsqu'on y suppose $x=\infty$.

221. 1er Théorème. *Si, pour des valeurs croissantes de x, la différence*

$$f(x+1)-f(x)$$

converge vers une certaine limite k, *la fraction*

$$\frac{f(x)}{x}$$

convergera en même temps vers la même limite.

Supposons d'abord que la quantité k ait une valeur finie, et désignons par ε un nombre aussi petit que l'on voudra. Puisque des valeurs croissantes de x font converger la différence

$$f(x+1)-f(x)$$

vers la limite k, on pourra donner au nombre h une valeur assez grande pour que, x étant égal ou supérieur à h, la différence dont il s'agit soit constamment comprise entre les limites

$$k-\varepsilon, \quad k+\varepsilon.$$

Cela posé, si l'on désigne par n un nombre entier quelconque, chacune des quantités

$$\begin{aligned}&f(h+1)-f(h)\\&f(h+2)-f(h+1),\\&\text{etc.}\ldots\\&f(h+n)-f(h+n-1),\end{aligned}$$

et par suite leur moyenne arithmétique, savoir,

$$\frac{f(h+h\,n)-f(h)}{n},$$

se trouvera comprise entre les limites $k-\varepsilon$, $k+\varepsilon$. On aura donc

$$\frac{f(h+n)-f(h)}{n}=k+\alpha,$$

α étant une quantité comprise entre les limites $-\varepsilon$, $+\varepsilon$.

Soit maintenant

$$h+n=x.$$

L'équation précédente deviendra

$$(1)\ldots\ \frac{f(x)-f(h)}{x-h}=k+\alpha,$$

et l'on en conclura

$$f(x)=f(h)+(x-h)(k+\alpha),$$

$$(2)\ldots\ \frac{f(x)}{x}=\frac{f(h)}{x}+\left(-1\frac{h}{x}\right)(k+\alpha).$$

De plus, pour faire croître indéfiniment la valeur de x, il suffira de faire croître indéfiniment le nombre entier n, sans changer la valeur de h. Supposons, en conséquence, que dans l'équation (2) l'on considère h comme une quantité constante,

et x comme une quantité variable qui converge vers la limite ∞. Les quantités,

$$\frac{f(h)}{x}, \quad \frac{h}{x},$$

renfermées dans le second membre, convergeront versl a limite zéro, et le second membre lui-même vers une limite de la forme

$$k+\alpha,$$

α étant toujours compris entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$. Par suite, le rapport

$$\frac{f(x)}{x}$$

aura pour limite une quantité comprise entre $k-\varepsilon$ et $k+\varepsilon$. Cette conclusion devant subsister, quelle que soit la petitesse du nombre ε, il en résulte que la limite en question sera précisément la quantité k. En d'autres termes, on aura

$$(3) \ldots \lim. \frac{f(x)}{x} = k = \lim. [f(x+1)-f(x)].$$

Supposons, en second lieu, $k=\infty$. En désignant alors par H un nombre aussi grand que l'on voudra, on pourra toujours attribuer au nombre h une valeur assez considérable, pour que, x étant égal ou supérieur à h, la différence

$$f(x+1)-f(x),$$

qui converge vers la limite ∞, devienne constamment supérieure à H; et, en raisonnant comme ci-dessus, on établira la formule

$$\frac{f(h+n)-f(h)}{n} > \text{H}.$$

Si maintenant on pose $h+n=x$, on trouvera, au lieu de l'équation (2), la formule suivante

$$\frac{f(x)}{x} > \frac{f(h)}{x} + \text{H}\left(1-\frac{h}{x}\right),$$

de laquelle on conclura, en faisant converger x vers la limite ∞,

$$lim. \frac{f(x)}{x} > \mathrm{H}.$$

La limite du rapport

$$\frac{f(x)}{x}$$

sera donc supérieure au nombre H, quelque grand qu'il soit. Cette limite supérieure à tout nombre assignable ne peut être que l'infini positif.

Supposons enfin $k = -\infty$. Pour ramener ce dernier cas au précédent, il suffira d'observer que, la différence

$$f(x+1) - f(x)$$

ayant pour limite $-\infty$, la suivante

$$[-f(x+1)] - [-f(x)]$$

aura pour limite $+\infty$. On en conclura que la limite de $\frac{-f(x)}{x}$ est égale à $+\infty$, et par suite que celle de $\frac{f(x)}{x}$ est égale à $-\infty$.

Corollaire. Pour donner une application du théorème précédent, supposons

$$f(x) = \mathrm{L}(x),$$

L étant la caractéristique des logarithmes dans un système dont la base surpasse l'unité. On trouvera

$$f(x+1) - f(x) = \mathrm{L}(x+1) - \mathrm{L}(x) = \mathrm{L}\left(1 + \frac{1}{x}\right),$$

et par suite

$$k = \mathrm{L}\left(1 + \frac{1}{\infty}\right) = \mathrm{L}(1) = 0.$$

On peut donc affirmer que, x venant à croître indéfiniment, le rapport

$$\frac{\mathrm{L}(x)}{x}$$

convergera vers la limite zéro ; et il en résulte que, *dans un système dont la base est superieure à l'unité, les logarithmes des nombres croissent beaucoup moins rapidement que les nombres eux-mêmes.*

Corollaire. Supposons, en second lieu,

$$f(x) = A^x,$$

A désignant un nombre supérieur à l'unité. On trouvera

$$f(x+1) - f(x) = A^{x+1} - A^x = A^x(A-1),$$

et par suite

$$k = (A-1)A^{\infty} = \infty.$$

On peut donc affirmer que, x venant à croître indéfiniment, le rapport

$$\frac{A^x}{x}$$

converge vers la limite ∞ ; et il en résulte que *l'exponentielle* A^x, *lorsque le nombre* A *surpasse l'unité, finit par croître beaucoup plus rapidement que la variable* x.

Corollaire. On doit observer, au reste, qu'il n'y a lieu à chercher par le 1er théorème la valeur du rapport

$$\frac{f(x)}{x}$$

correspondante à $x = \infty$, que dans le cas où la fonction $f(x)$ devient infinie avec la variable x. Si cette fonction restait finie pour $x = \infty$, le rapport $\frac{f(x)}{x}$ aurait évidemment zéro pour limite.

Je passe au théorème qui sert à déterminer dans plusieurs cas la valeur de

$$[f(x)]^{\frac{1}{x}}$$

pour $x = \infty$. Voici en quoi il consiste :

222. 2e Théorème. *Si, la fonction* $f(x)$ *étant positive*

pour de très grandes valeurs de x, le rapport

$$\frac{f(x+1)}{f(x)}$$

converge, tandis que x croît indéfiniment, vers la limite k, l'expression

$$[f(x)]^{\frac{1}{x}}$$

convergera en même temps vers la même limite.

Supposons d'abord que la quantité k, nécessairement positive, ait une valeur finie, et désignons par ε un nombre aussi petit que l'on voudra. Puisque des valeurs croissantes de x font converger le rapport

$$\frac{f(x+1)}{f(x)}$$

vers la limite k, on pourra donner au nombre h une valeur assez grande pour que, x étant égal ou supérieur à h, le rapport dont il s'agit soit constamment compris entre les limites

$$k-\varepsilon, \quad k+\varepsilon.$$

Cela posé, si l'on désigne par n un nombre entier quelconque, chacune des quantités

$$\frac{f(h+1)}{f(h)}, \ \frac{f(h+2)}{f(h+1)}, \ldots, \frac{f(h+n)}{f(h+n-1)},$$

et par suite leur moyenne géométrique, savoir,

$$\left[\frac{f(h+n)}{f(h)}\right]^{\frac{1}{n}}$$

se trouvera comprise entre les limites $k-\varepsilon$, $k+\varepsilon$; on aura donc

$$\left[\frac{f(h+n)}{f(h)}\right]^{\frac{1}{n}} = k+\alpha,$$

α étant une quantité comprise entre les limites $-\varepsilon$, $+\varepsilon$. Soit maintenant

$$h+n=x.$$

L'équation précédente deviendra

$$(4)\ldots\left[\frac{f(x)}{f(h)}\right]^{\frac{1}{x-h}}=k+\alpha,$$

et l'on en conclura

$$f(x)=f(h)\times(k+\alpha)^{x-h},$$

$$(5)\ldots[f(x)]^{\frac{1}{x}}=[f(h)]^{\frac{1}{x}}(k+\alpha)^{1-\frac{h}{x}}.$$

De plus, pour faire croître indéfiniment la valeur de x, il suffira de faire croître indéfiniment le nombre entier n, sans changer la valeur de h. Supposons, en conséquence, que dans l'équation (5) l'on considère h comme une quantité constante, et x comme une quantité variable qui converge vers la limite ∞. Les quantités

$$[f(h)]^{\frac{1}{x}},\quad 1-\frac{h}{x}$$

renfermées dans le second membre, convergeront vers la limite 1, et le second membre convergera lui-même vers une limite de la forme

$$k+\alpha,$$

α étant toujours compris entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$. Par suite, l'expression

$$[f(x)]^{\frac{1}{x}}$$

aura pour limite une quantité comprise entre $k-\varepsilon$ et $k+\varepsilon$. Cette conclusion devant subsister, quelle que soit la petitesse du nombre ε, il en résulte que la limite en question sera précisément la quantité k. En d'autres termes, on aura

$$(6)\ldots lim.\,[f(x)]^{\frac{1}{x}} = k = lim.\frac{f(x+1)}{f(x)}.$$

Supposons, en second lieu, la quantité k infinie, c'est-à-dire, puisque cette quantité est positive, $k = \infty$. En désignant alors par H un nombre aussi grand que l'on voudra, on pourra toujours attribuer au nombre h une valeur assez considérable pour que, x étant égal ou supérieur à h, le rapport

$$\frac{f(x+1)}{f(x)}$$

qui converge vers la limite ∞, devienne constamment supérieur à H ; et, en raisonnant comme ci-dessus, on établira la formule

$$\left[\frac{f(h+n)}{f(h)}\right] > \mathrm{H}.$$

Si maintenant on pose $h + n = x$, on trouvera, au lieu de l'équation (5), la formule suivante

$$[f(x)]^{\frac{1}{x}} > [f(h)]^{\frac{1}{x}}\mathrm{H}^{1-\frac{1}{x}}$$

de laquelle on conclura, en faisant converger x vers la limite ∞,

$$lim.\,[f(x)]^{\frac{1}{x}} > \mathrm{H}.$$

La limite du rapport

$$[f(x)]^{\frac{1}{x}}$$

sera donc supérieure au nombre H, quelque grand qu'il soit. Cette limite, supérieure à tout nombre assignable, ne peut être que l'infini positif.

Nota. On pourrait facilement démontrer l'équation (6), en cherchant par le théorème 1[er] la limite vers laquelle converge le logarithme

$$\mathrm{L}f[(x)]^{\frac{1}{x}} = \frac{\mathrm{L}[f(x)]}{x},$$

et en repassant ensuite des logarithmes aux nombres.

Corollaire. Pour donner une application du 2e théorème, supposons
$$f(x)=x;$$
on aura
$$\frac{f(x+1)}{f(x)}=\frac{x+1}{x}=1+\frac{1}{x},$$
et par suite, en passant aux limites, $k=1$.
Par conséquent, si l'on fait croître indéfiniment la variable x, la fonction $x^{\frac{1}{x}}$ convergera vers la limite 1.

Corollaire. Soit, en second lieu,
$$f(x)=ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\text{etc}\ldots=\text{P},$$
de sorte que P désigne un polynome en x du degré n. On trouvera
$$\frac{f(x+1)}{f(x)}=\frac{a\left(1+\frac{1}{x}\right)^n+\frac{b}{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{n-1}+\frac{c}{x^2}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{n-2}+\text{etc.}}{a+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}+\text{etc.}}$$
et, en passant aux limites,
$$k=\frac{a}{a}=1.$$
Si donc P représente un polynome entier quelconque, $P^{\frac{1}{x}}$ aura pour limite 1.

Corollaire. Soit enfin $f(x)=L(x)$.
On trouvera
$$\frac{f(x+1)}{f(x)}=\frac{\text{L}(x+1)}{\text{L}(x)}=\frac{\text{L}(x)+\text{L}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\text{L}(x)}=1+\frac{\text{L}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\text{L}(x)}$$
et, en passant aux limites, $k=1$.

Par suite, $[\text{L}(x)]^{\frac{1}{x}}$ a encore pour limite l'unité.

Questions sur le calcul des Probabilités.

223. On appelle *probabilité* d'un événement, le rapport du nombre des cas où cet événement aura lieu au nombre total des cas, supposés tous également possibles. Lorsque tous les cas sont favorables à l'événement, la probabilité devient égale à l'unité et prend le nom de *certitude*.

La théorie des probabilités a donc le même degré d'exactitude que toutes les autres théories mathématiques; on ne cherche qu'à reconnaître les cas également possibles, et à distinguer parmi eux ceux qui sont favorables à l'événement. Mais il faut bien se garder de croire que l'application de cette théorie soit susceptible du même degré de précision; les événemens n'ont pas toujours lieu suivant leur degré présumé de probabilité, parce qu'un grand nombre de causes, qui sont incalculables, ont plus ou moins d'influence sur ces événemens.

Nous nous bornerons ici à considérer les probabilités sous leur point de vue purement mathématique, et nous n'y verrons jamais que le rapport du nombre des cas favorables, au nombre des cas également possibles, et non pas l'indication certaine de la manière dont les choses se passeront réellement.

224. Ier Principe. *La probabilité d'un événement qui dépend d'un autre, est le produit de la probabilité de ce second événement par la probabilité que celui-ci ayant lieu l'autre aura lieu.*

En effet, soit p le nombre des cas favorables à l'événement qui doit avoir lieu le premier, et q le nombre total des cas qui y sont relatifs, sa probabilité sera $\frac{p}{q}$. Soit q' le nombre des cas relatifs au second événement et correspondans à chacun des cas du premier, et p' le nombre des cas favorables au second quand le premier a eu lieu; $\frac{p'}{q'}$ sera la probabilité que le premier événement ayant eu lieu, le second aura lieu. Or le nombre total des cas possibles relativement aux deux événemens est qq',

puisqu'à chacun des q événemens de la première espèce, il en correspond q' de la seconde, et de même pp' est le nombre des cas favorables au second événement; la probabilité de ce dernier sera donc $\frac{pp'}{qq'}$ ou $\frac{p}{q} \times \frac{p'}{q'}$, comme nous l'avions annoncé.

De là suit immédiatement le principe suivant :

IIe Principe. *La probabilité d'un événement futur, tirée d'un événement dont il dépend, est le quotient de la probabilité de l'événement composé de ces deux événemens, et déterminée* à priori, *par la probabilité de l'autre événement, déterminée pareillement* à priori.

Corollaire. Il suit encore du premier principe que, *si* $\frac{p}{q}$ *est la probabilité d'un événement*, $\frac{p^m}{q^m}$ *sera la probabilité pour que cet événement ait lieu* m *fois de suite, en supposant que les événemens passés n'influent pas sur les futurs*, car si A désigne la probabilité pour que l'événement ait lieu un certain nombre de fois de suite, on aura la probabilité pour qu'il ait lieu une fois de plus, en multipliant A par la probabilité constante $\frac{p}{q}$; d'où il suit que les probabilités pour que l'événement ait lieu deux fois, ou trois fois, ..., ou m fois de suite, seront respectivement $\frac{p^2}{q^2}$, $\frac{p^3}{q^3}$, ..., $\frac{p^m}{q^m}$.

IIIe Principe. *Si un événement observé peut résulter de* n *causes différentes; leurs probabilités sont respectivement comme les probabilités de l'événement, tirées de leur existence; et la probabilité de chacune d'elles est une fraction dont le numérateur est la probabilité de l'événement, dans l'hypothèse de l'existence de la cause, et dont le dénominateur est la somme des probabilités semblables, relatives à toutes les causes.*

Considérons en effet, comme événement composé, l'événement observé résultant d'une de ces causes.

La probabilité de cet événement composé, probabilité que nous désignerons par E, sera égale au produit de la probabilité

de l'événement observé, déterminée *à priori*, et que nous nommerons F, par la probabilité que cet événement ayant lieu, la cause dont il s'agit existe, probabilité qui est celle de la cause, tirée de l'événement observé, et que nous nommerons P; on aura donc

$$P = \frac{E}{F}.$$

La probabilité de l'événement composé, est le produit de la probabilité de la cause, par la probabilité que cette cause ayant lieu, l'événement arrivera, probabilité que nous désignerons par H; toutes les n causes étant *à priori* également possibles, la probabilité de chacune d'elles est $\frac{1}{n}$; on a donc

$$E = \frac{H}{n}$$

La probabilité de l'événement observé, est la somme de tous les E relatifs à chaque cause; en désignant donc par $S.\frac{H}{n}$ la somme de toutes les valeurs de $\frac{H}{n}$, on aura

$$F = S.\frac{H}{n};$$

l'équation $P = \frac{E}{F}$ deviendra donc

$$P = \frac{H}{S.H};$$

ce qui est le principe énoncé ci-dessus.

Pour appliquer les principes précédens à un exemple, supposons qu'une urne renferme trois boules dont chacune ne puisse être que blanche ou noire; qu'après avoir tiré une boule, on la remette dans l'urne pour procéder à un nouveau tirage,

et qu'après m tirages, on n'ait amené que des boules blanches. Il est visible que l'on ne peut faire *à priori*, que quatre hypothèses; car les boules peuvent être, ou toutes blanches, ou deux blanches et une noire, ou deux noires et une blanche, ou enfin toutes noires. Si l'on considère ces hypothèses comme autant de causes de l'événement observé, les probabilités de l'événement, relatives à ces causes, seront

$$1, \quad \frac{2^m}{3^m}, \quad \frac{1}{3^m}, \quad 0.$$

Les probabilités respectives de ces hypothèses, tirées de l'événement observé, seront donc, par le troisième principe,

$$\frac{3^m}{3^m+2^m+1}, \quad \frac{2^m}{3^m+2^m+1}, \quad \frac{1}{3^m+2^m+1}, \quad 0.$$

On voit, au reste, qu'il est inutile d'avoir égard aux hypothèses qui excluent l'événement, parce que la probabilité résultante de ces hypothèses étant nulle, leur omission ne change point les expressions des autres probabilités.

Si l'on veut avoir la probabilité de n'amener que des boules noires dans les m' tirages suivans, on déterminera *à priori* les probabilités d'amener d'abord m boules blanches, ensuite m' boules noires. Ces probabilités sont, relativement aux hypothèses précédentes,

$$0, \quad \frac{2^m}{3^{m+m'}}, \quad \frac{2^{m'}}{3^{m+m'}}, \quad 0;$$

et comme *à priori*, les quatre hypothèses sont également possibles, la probabilité de l'événement composé sera le quart de la somme des quatre probabilités précédentes, ou

$$\frac{1}{4}\left(\frac{2^m+2^{m'}}{3^{m+m'}}\right).$$

Les probabilités de l'événement observé, déterminées *à priori*,

dans les quatre hypothèses précédentes, étant respectivement

$$\frac{3^m}{3^m}, \quad \frac{2^m}{3^m}, \quad \frac{1}{3^m}, \quad 0,$$

le quart de leur somme, ou

$$\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3^m+2^m+1}{3^m}\right),$$

sera la probabilité de l'événement observé, déterminée *à priori*; en divisant donc la probabilité de l'événement composé, par cette probabilité, on aura, par le second principe,

$$\frac{2^m+2^{m'}}{3^{m'}.(3^m+2^m+1)},$$

pour la probabilité d'amener m' boules noires dans les m' tirages suivans.

On peut encore déterminer cette probabilité par le principe suivant.

IVe. Principe. *La probabilité d'un événement futur est la somme des produits de la probabilité de chaque cause, tirée de l'événement observé, par la probabilité que cette cause existant, l'événement futur aura lieu.*

Ici les probabilités de chaque cause, tirées de l'événement observé, sont, comme on l'a vu,

$$\frac{3^m}{3^m+2^m+1}, \quad \frac{2^m}{3^m+2^m+1}, \quad \frac{1}{3^m+2^m+1}, \quad 1;$$

les probabilités de l'événement futur, relatives à ces causes, sont respectivement

$$0, \quad \frac{1}{3^{m'}}, \quad \frac{2^{m'}}{3^{m'}}, \quad 0;$$

la somme de leurs produits respectifs, ou

$$\frac{2^m+2^{m'}}{3^{m'}.(3^m+2^m+1)},$$

sera la probabilité de l'événement futur, tirée de l'événement observé ; ce qui est conforme à ce qui précède.

Si l'on suppose quatre boules dans l'urne, et qu'ayant amené une boule blanche au premier tirage, on cherche la probabilité de n'amener que des boules noires dans les m' tirages suivans ; on trouvera, par les principes exposés ci-dessus, que cette probabilité est égale à

$$\frac{3 + 2^{m'+1} + 3^{m}}{10 . 4^{m'}}.$$

Si le nombre des boules blanches égale celui des noires, la probabilité de n'amener que des boules noires dans m' tirages est $\frac{1}{2^{m'}}$. Elle surpasse la précédente lorsque m' est égal ou moindre que 5 ; mais elle lui devient inférieure lorsque m' surpasse 5, quoique la boule blanche extraite d'abord de l'urne indique une supériorité dans le nombre des boules blanches. L'explication de ce paradoxe tient à ce que cette indication n'exclut point la supériorité du nombre des boules noires ; elle la rend seulement moins probable ; au lieu que la supposition d'une égalité parfaite entre le nombre des boules blanches et celui des noires exclut cette supériorité ; or cette supériorité, quelque petite que soit sa probabilité, doit rendre la probabilité d'amener de suite m' boules noires plus grande que dans le cas de l'égalité des couleurs, lorsque m' est très grand.

225. Problème. *Déterminer les diverses chances des loteries.*

On sait que le nombre des combinaisons de m lettres n à n est

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1 \;.\; 2 \;.\; 3 \;\ldots\; n},$$

que le nombre des arrangemens de n lettres n à n est le produit des nombres $1, 2, 3, \ldots, n$; et enfin que le nombre des arrangemens différens de m lettres prises n à n est

$$m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1).$$

Cela posé, supposons que le nombre des numéros d'une loterie soit n, et qu'il en sorte r à chaque tirage ; on demande la

probabilité qu'une combinaison de s de ces numéros sortira au premier tirage.

Le nombre total des combinaisons des numéros, pris r à r, est, par ce qui précède,

$$\frac{n.(n-1).(n-2).....(n-r+1)}{1.2.3.....r}.$$

Pour avoir parmi ces combinaisons le nombre de celles dans lesquelles les s numéros sont compris, on observera que si l'on retranche ces numéros de la totalité des numéros, et que l'on combine $r-s$ à $r-s$, le reste $n-s$, le nombre de ces combinaisons sera le nombre cherché; car il est clair qu'en ajoutant les s numéros à chacune de ces combinaisons, on aura les combinaisons r à r dans lesquelles sont ces s numéros. Ce nombre est donc

$$\frac{(n-s).(n-s-1)....(n-r+1)}{1.2.3....(r-s)},$$

en le divisant par le nombre total des combinaisons r à r des n numéros, on aura pour la probabilité cherchée,

$$\frac{r.(r-1).(r-2)....(r-s+1)}{n.(n-1).(n-2)....(n-s+1)}.$$

En divisant cette quantité par $1.2.3...s$, on aura, par ce qui précède, la probabilité que les s numéros sortiront dans un ordre déterminé entre eux. On aura la probabilité que les s premiers numéros du tirage seront ceux de la combinaison proposée, en observant que cette probabilité revient à celle d'amener cette combinaison, en supposant qu'il ne sort que s numéros à chaque tirage; ce qui revient à faire $r=s$ dans la fonction précédente, qui devient ainsi

$$\frac{1.2.3.....s}{n.(n-1)....(n-s+1)}.$$

Enfin, on aura la probabilité que les s numéros choisis sortiront

les premiers dans un ordre déterminé, en réduisant le numérateur de cette fraction à l'unité.

Les quotiens des mises divisées par ces probabilités sont ce que la loterie doit rendre aux joueurs : l'excédant de ces quotiens sur ce qu'elle donne est son bénéfice. En effet, si l'on nomme p la probabilité du joueur, m sa mise, et x ce que la loterie doit lui rendre pour l'égalité du jeu, $x-m$ sera la mise de la loterie; car ayant reçu la mise m, et rendant x au joueur, elle ne met au jeu que $x-m$. Or pour l'égalité du jeu, l'espérance mathématique de chaque joueur doit être égale à sa crainte; son espérance est le produit de la mise $x-m$ de son adversaire, par la probabilité p de l'obtenir; sa crainte est le produit de sa mise m, par la probabilité $1-p$ de la perte. On a donc

$$p \times (x-m) = (1-p) \times m;$$

c'est-à-dire que pour l'égalité du jeu, les mises doivent être réciproques aux probabilités de gagner. Cette équation donne

$$x = \frac{m}{p}.$$

Ainsi ce que la loterie doit rendre est le quotient de la mise divisée par la probabilité du joueur pour gagner.

226. Problème. *Une urne étant supposée renfermer* x *boules, on en tire une partie ou la totalité, et l'on demande la probabilité que le nombre des boules extraites sera pair.*

La somme des cas dans lesquels ce nombre est l'unité, égale évidemment x, puisque chacune des boules peut également être extraite. La somme des cas dans lesquels ce nombre égale 2, est la somme des combinaisons des x boules prises deux à deux, et cette somme est égale à $\frac{x(x-1)}{1 \cdot 2}$. La somme des cas dans lesquels le même nombre égale 3, est la somme des combinaisons des boules prises trois à trois, et cette somme est $\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}$, et ainsi de suite. Ainsi les termes successifs du développement

16

de la fonction $(1+1)^x-1$ représenteront tous les cas dans lesquels le nombre des boules extraites est successivement 1, 2, 3, etc. jusqu'à x; d'où il est facile de conclure que la somme de tous les cas relatifs aux nombres impairs est égale à $\frac{1}{2}(1+1)^x-\frac{1}{2}(1-1)^x$, ou 2^{x-1}, et que la somme de tous les cas relatifs aux nombres pairs est $\frac{1}{2}(1+1)^x+\frac{1}{2}(1-1)^x-1$, ou $2^{x-1}-1$. La réunion de ces deux sommes est le nombre de tous les cas possibles; ce nombre est donc 2^x-1; ainsi la probabilité que le nombre des boules extraites sera pair est $\frac{2^{x-1}-1}{2^x-1}$, et la probabilité que ce nombre sera impair est $\frac{2^{x-1}}{2^x-1}$; il y a donc de l'avantage à parier avec égalité pour un nombre impair.

Si le nombre x est inconnu, et si l'on sait seulement qu'il ne peut excéder n, et que ce nombre et tous les inférieurs sont également possibles, on aura le nombre de tous les cas possibles relatifs aux nombres impairs, en faisant la somme de toutes les valeurs de 2^{x-1}, depuis $x=1$ jusqu'à $x=n$, et il est facile de voir que cette somme est 2^n-1. On aura pareillement la somme de tous les cas possibles relatifs aux nombres pairs, en sommant la fonction $2^{x-1}-1$, depuis $x=1$ jusqu'à $x=n$, et l'on trouve cette somme égale à 2^n-n-1; la probabilité d'un nombre pair est donc alors $\frac{2^n-n-1}{2^{n+1}-n-2}$, et celle d'un nombre impair est $\frac{2^n-1}{2^{n+1}-n-2}$.

Supposons maintenant que l'urne renferme le nombre x de boules blanches et le même nombre de boules noires; on demande la probabilité qu'en tirant un nombre pair quelconque de boules, on amènera autant de boules blanches que de boules noires, tous les nombres pairs pouvant être également amenés.

Le nombre des cas dans lesquels une boule blanche de l'urne peut se combiner avec une boule noire est évidemment $x\times x$. Le nombre des cas dans lesquels deux boules blanches peuvent se combiner avec deux boules noires est $\frac{x(x-1)}{1.2}\times\frac{x(x-1)}{1.2}$; et

ainsi de suite. Le nombre des cas dans lesquels on amènera autant de boules blanches que de boules noires est donc la somme des carrés des termes du développement du binome $(1+1)^x$, moins l'unité. Pour avoir cette somme, nous observerons qu'elle est égale au terme indépendant de a, dans le développement de $\left(1+\frac{1}{a}\right)^x \times (1+a)^x$. Cette fonction est égale à $\frac{(1+a)^{2x}}{a^x}$. Le terme indépendant de a, dans son développement, est ainsi le coefficient du terme moyen du binome $(1+a)^{2x}$; ce coefficient est $\frac{1.2.3\ldots\ldots 2x}{(1.2.3\ldots\ldots x)^2}$; le nombre des cas dans lesquels on peut tirer de l'urne autant de boules blanches que de boules noires est donc

$$\frac{1.2.3\ldots 2x}{(1.2.3\ldots x)^2}-1.$$

Le nombre de tous les cas possibles est la somme des termes de rang impair dans le développement du binome $(1+1)^{2x}$, moins le premier ou l'unité. Cette somme est $\frac{1}{2}(1+1)^{2x}+\frac{1}{2}(1-1)^{2x}$; le nombre des cas possibles est donc $2^{2x-1}-1$; ce qui donne pour l'expression de la probabilité cherchée,

$$\frac{\frac{1.2.3\ldots 2x}{(1.2.3\ldots x)^2}-1}{2^{2x-1}-1}.$$

PROBLÈMES
DE GÉOMÉTRIE.

Des Points et des Lignes sur un plan.

227. 1er Problème. (*Fig.* 13). *Mener par le point* A *une droite qui fasse un angle donné avec la droite* XY.

Par un point quelconque B de XY, tirez BK, BH, qui forment avec XY l'angle donné : par le point A, menez-leur les parallèles AM, AN ; elles satisferont à la question.

2e Problème. (*Fig.* 14). *Mener par le point* A *une droite telle, que la partie interceptée entre les deux parallèles* XY, ZU, *soit d'une longueur donnée* δ.

Par un point quelconque B de l'une des parallèles, décrivez une circonférence avec la longueur donnée δ comme rayon ; joignez au centre B les points C, D de sa rencontre avec la seconde parallèle; puis menez par A des parallèles à ces deux lignes, elles résoudront la question.

Le problème serait évidemment impossible si la longueur donnée était moindre que la distance des deux parallèles.

3e Problème. (*Fig.* 15). *Du point* A *tirer une ligne* AC *telle, que la différence entre* AB *et* BC *soit d'une longueur* δ *donnée.*

Au-dessus de XY, tirez une troisième parallèle à la même distance que ZU, et coupez-la par un cercle décrit de A comme centre avec le rayon δ : joignez les points de rencontre M, N avec A, ces deux lignes satisferont à la question, soit que la troisième parallèle soit au-dessus ou au-dessous de A.

4e Problème. (*Fig.* 16). *Trouver sur la droite* XY *un point* M, *tel qu'en le joignant à deux points donnés* A, B, *les angles* AMX, BMY *soient égaux.*

Abaissez de l'un des deux points une perpendiculaire AP sur XY, prolongez-la de PK = PA, et joignez BK; le point M de rencontre de BK avec XY sera le point cherché. Car AMX = XMK et XMK = BMY.

5ᵉ Problème. (*Fig.* 17). *Étant donnés deux points* A, B, *dans l'intérieur d'une portion de polygone quelconque* XYZU, *déterminer des points* M, N, P, *tels que les droites* AM, MN, NP, PB *fassent des angles égaux avec les côtés sur lesquels elles se rencontrent.*

Abaissez AK perpendiculaire sur XY et prolongez-la de KH = AK; de H, abaissez-en une seconde sur YZ et prolongez-la d'une quantité égale en I; de I, abaissez-en une troisième sur ZU et prolongez-la d'une quantité égale en L; joignez LB. Le point de rencontre P sera un des points cherchés. Tirant alors PN sous un angle égal avec ZU, on déterminera N, puis enfin M. La démonstration se ferait comme dans les cas précédens.

6ᵉ Problème. (*Fig.* 18). *Deux points*, A, B, *étant donnés entre deux droites* XY, ZU, *trouver des points* M, P, N, ..., *en nombre donné sur ces deux lignes, de manière que les droites* AM, MN, NP, PB, ..., *fassent des angles égaux avec la ligne sur laquelle elles se coupent.*

Abaissez AK perpendiculaire sur XY, et prolongez-la de KH = AK; du point H, abaissez-en une seconde sur ZU; et continuez ainsi autant qu'il y aura de points demandés; l'extrémité de la dernière perpendiculaire étant jointe avec B, déterminera le point P; on en déduira tous les autres points.

Ce problème, dans le cas où les lignes XY, ZU sont parallèles, et les deux précédens, trouvent des applications dans le jeu du billard. Ces applications sont fondées sur ce principe de physique, que lorsqu'un corps élastique rencontre un plan résistant, il se réfléchit sous un angle égal à celui d'incidence.

7ᵉ Problème. (*Fig.* 19). *Deux points* A, B *étant donnés d'un même côté de la droite* XY, *trouver un point* M *de* XY *tel, que la somme* AM + MB *soit un minimum.*

Déterminez par ce qui précède un point M tel, que les angles

AMX, BMY soient égaux, ce sera le point cherché. Car soit N un autre point quelconque, on aura

$$AN+NB=KN+NB, \quad AM+MB=KB. \text{ Or } KB<KN+NB.$$

Donc $AM+MB$ est un *minimum*.

Si les points A, B (*fig.* 20) étaient de côtés différens de XY, et qu'on demandât que la différence des distances fût un maximum, on abaisserait la perpendiculaire AK qu'on prolongerait de KH = AK, on tirerait la droite de BHM, qui déterminerait le point cherché M. Car la différence de AM et MB est HB, et pour tout autre point N, la différence de BN à AN ou à HN est moindre que HB.

8ᵉ Problème. (*Fig.* 21). *Étant données deux droites* EF, GH, *qu'on ne peut prolonger,* 1° *mener par un point donné* M *une ligne qui passe par leur point de concours;* 2° *tirer une ligne qui partage leur angle en deux parties égales.*

1°. Tirez une sécante quelconque AB par le point M, et une parallèle quelconque CD que vous partagerez dans le même rapport en N, la droite NM passera par le point de concours des deux droites données.

2°. Par le point M (*Fig.* 22), tirez MK parallèle à XY, et KH qui partage l'angle MKZ en deux parties égales; l'angle KHX sera égal à HKZ; élevant une perpendiculaire sur le milieu de HK, elle passera par le point de concours des deux droites données, et partagera leur angle en deux parties égales.

9ᵉ Problème. (*Fig.* 23). *Les trois droites* AB, AC, BC *étant données, tirer une parallèle* MN *à* BC, *de manière que la somme ou la différence des parties* BM, CN *soit égale à* MN.

1°. Partagez les deux angles intérieurs B et C en deux parties égales, et menez par leur point de rencontre O la parallèle MN, à BC, elle sera la ligne cherchée; car MO = MB et NO = NC.

La même construction peut se faire en dessous de BC.

2°. Tirez des droites BK, CK, qui divisent les angles ABC, ACD, en deux parties égales; la parallèle Kmn à CB sera la ligne cherchée, car Km = mC et Kn = nB.

10ᵉ Problème. (*Fig.* 24). *Étant données les trois droites* AB, AC, BC, *mener une parallèle* MN *à* BC, *telle que la somme ou la différence des parties* BM, CN *soit égale à une ligne donnée.*

On a $\quad BM : NC :: AB : AC,$

d'où $\quad BM \pm NC : NC :: AB \pm AC : AC.$

Or, AB, AC et BM ± NC sont connus, cette proportion fera donc connaître CN.

11ᵉ Problème. (*Fig.* 25). *Étant donné le carré* ABCD, *y inscrire un autre carré donné.*

Soit EFHK le carré inscrit demandé. On aura

$$\overline{EF}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{AF}^2 = \overline{FB}^2 + \overline{AF}^2.$$

On connaît donc la somme des carrés des segmens AF, FB; la retranchant du carré de AB, on connaîtra le double rectangle de ces segmens; la question reviendra donc à trouver deux lignes, connaissant leur somme et leur produit, ce qui n'offre aucune difficulté.

12ᵉ Problème. (*Fig.* 26). *Étant donné le triangle* ABC *et un point* D *sur un des côtés, y inscrire un triangle semblable à un triangle donné et ayant un de ses sommets en* D.

Prenez un triangle quelconque MNP semblable à celui qu'il faut inscrire, et soit M l'angle qui doit avoir son sommet en D. Décrivez sur MN et MP des segmens respectivement capables des angles B, A; et, par M, tirez KH telle que KM : MH :: BD : DA (*voy.* 13ᵉ Prob.); joignez KN, HP, et prolongez-les en L; le triangle HKL sera semblable à ABC, le point M sera situé sur KH de la même manière que D sur AB; le système construit est donc semblable à celui qu'on cherche, et par conséquent ce dernier s'obtiendra soit en reportant sur ABC des segmens qui soient à ceux de KHL dans le rapport des côtés de ces triangles, soit en tirant par le point D des lignes sous les mêmes angles qu'au point M.

13ᵉ Problème. (*Fig.* 27). *Etant donnés deux cercles* A, B, *qui se coupent, mener par un de leurs points de rencontre* C,

une sécante telle, que les cordes interceptées soient dans le rapport de m *à* n.

Supposons que MN soit la ligne cherchée; abaissons sur elle les perpendiculaires AK, BH, les moitiés KC, CH des cordes seront aussi dans le rapport de m à n; si donc on partageait AB en O dans le rapport de m à n, et qu'on joignît OC, cette ligne serait parallèle à BH et AK, et par suite perpendiculaire sur MN. On résoudra donc le problème en prenant un point O qui divise AB dans le rapport de m à n, et en tirant par C une perpendiculaire MN à OC.

La sécante pourrait encore être placée de manière que ses points de rencontre avec les cercles fussent du même côté de C, comme CM'N'. On verrait de la même manière que pour avoir $CM' : CN' :: m : n$, il faudra déterminer un point X sur le prolongement de AB, de manière que l'on ait $XB : XA :: m : n$, joindre CX, et lui mener par le point C une perpendiculaire CN' qui sera la ligne cherchée.

14e Problème. (*Fig.* 28). *Etant donnés deux cercles* A, B, *qui se coupent en* C, *mener par ce point une sécante, telle que la somme ou la différence des deux cordes soit égale à une ligne donnée* 2α.

1°. Soit MN (*fig.* 28) la ligne cherchée, abaissez les perpendiculaires AK, BH à MN; KH, moitié de MN, sera d'une longueur connue α, ainsi que sa parallèle BL. Tout se réduit donc à faire un triangle rectangle dont AB soit l'hypoténuse, et dont un des côtés de l'angle droit soit la demi-somme donnée α. Or, on peut construire deux triangles d'après ces données; il y aura donc deux directions pour MN, et elles feront des angles égaux avec AB.

Les deux triangles que l'on ferait de l'autre côté de AB, reproduiraient les deux mêmes directions pour MN.

Il suit de là que la plus grande valeur de la sécante MCN a lieu quand elle est parallèle à AB.

2°. Soit la droite CMN (*fig.* 28 *bis*) telle que la différence MN des deux cordes, soit égale à 2α. Abaissez les perpendiculaires BK, AH, à CN; la différence KH des demi-cordes sera α; menant la parallèle AL à CN, on connaîtra dans le triangle rec-

tangle ABL, l'hypoténuse AB et le côté AL. On pourra donc encore construire deux triangles ABL, ABL', et menant par C des parallèles aux côtés AL, AL', on aura deux lignes qui satisferont à la question, et qui feront des angles égaux avec AB.

Si l'on voulait que les deux points M, N fussent situés comme dans la figure 28, on décrirait un cercle égal à B, et qui lui fût tangent en C, et l'on rentrerait dans la même construction.

15e Problème. (*Fig.* 29). *Partager un triangle* ABC *en* m *parties équivalentes, par des parallèles à un de ses côtés.*

Pour avoir la première parallèle CD à BC, faites la proportion

$$\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 :: m : 1.$$

Pour construire la seconde parallèle EF à BC, faites la proportion $\overline{AB}^2 : \overline{AE}^2 :: m : 2$; et ainsi de suite.

16e Problème. (*Fig.* 30). *Tirer d'un point donné* A *une sécante* AZ *telle, que les parties interceptées entre les trois droites données* OB, OC, OD, *soient dans le rapport de* m *à* n.

Prenez les lignes MN, NP, dans le rapport de m à n; décrivez sur elles des segmens capables des angles α, β, et soit Q leur point de rencontre; faites l'angle PQK = DOA, vous aurez un système semblable à celui qu'il faut construire. Prenant alors QA' = OA, et tirant A'V parallèle à KM, il suffira de reporter QV sur OB, de O en Z; le point Z sera déterminé.

17e Problème. (*Fig.* 31). *Trouver le lieu des points tels que le rapport de leurs distances à deux points fixes* A, B, *soit constamment égal au rapport donné de* m *à* n.

Construisez d'abord les deux points M, N de ce lieu, qui se trouvent sur la droite indéfinie AB, et pour cela prenez

$$AM : MB :: m : n \quad \text{et} \quad AN : NB :: m : n.$$

Cela posé, soit X un point quelconque, tel que

$$AX : XB :: m : n;$$

on sait qu'en joignant MX, l'angle AXB sera partagé en deux parties égales, et qu'en joignant NX, son supplément BXY le sera de la même manière; les lignes MX, NX seront donc perpendi-

culaires entre elles; le lieu cherché des points X sera donc un cercle décrit sur MN comme diamètre.

18e Problème. (*Fig.* 32). *Trouver les points d'un plan qui sont également éclairés par deux lumières dont la position est connue, et dont les intensités sont* m *et* n *à l'unité de distance.*

La solution de cette question repose sur ce principe de Physique, que *les intensités d'une même lumière à des distances différentes, sont réciproquement proportionnelles aux carrés de ces distances.*

Cela posé : soient A, B, les deux points lumineux, et M un point qu'ils éclairent également; les intensités z, z', respectives des deux lumières sur M seront données par les proportions

$$z : m :: 1 : \overline{AM}^2, \quad z' : n :: 1 : \overline{BM}^2.$$

Or $z = z'$; donc $\frac{m}{\overline{AM}^2} = \frac{n}{\overline{BM}^2}$; d'où $AM : BM :: \sqrt{m} : \sqrt{n}$.

Le rapport de AM à MB étant constant, le lieu des points M est une circonférence que l'on construira comme dans le cas précédent.

Si l'on avait trois points lumineux, et qu'on voulût trouver les points de leur plan qui en reçoivent une égale lumière, on chercherait d'abord le lieu des points également éclairés par les deux premiers, puis par l'un d'eux et le troisième; la rencontre de ces lieux donnerait les points cherchés. Il y aura alors deux circonférences à décrire, et le problème pourra avoir deux solutions, ou une seule, ou enfin aucune.

19e Problème. (*Fig.* 33). *Par trois points* A, B, C, *faire passer les cotés d'un triangle équilatéral, dont la surface soit la plus grande possible.*

Sur AC et CB, décrivez des segmens capables de $\frac{2}{3}$ d'angle droit. Si par C vous menez une sécante quelconque, MN, et que vous tiriez les lignes MAD, NBD, elles détermineront un triangle équilatéral MDN, puisque les angles en M et N sont égaux à $\frac{2}{3}$.

Il suffira donc pour résoudre la question de tirer par le point

donné C une sécante qui soit un maximum; problème qui a été résolu (*page* 248).

20ᵉ Problème. *Etant donnée la différence de la diagonale au côté d'un carré, construire ce carré.*

Vous aurez un système semblable à celui que vous cherchez, en construisant un carré quelconque et sa diagonale; vous en déduirez le côté du carré demandé, en observant que les côtés de deux carrés, sont entre eux comme leurs diagonales, ou comme les différences de ces diagonales aux mêmes côtés.

21ᵉ Problème. (*Fig.* 34). *Inscrire dans un cercle un rectangle dont la surface soit donnée.*

Sur le diamètre AB, faites un triangle AMB égal à la moitié de la surface donnée, et tirez AN parallèle à BM; AMBN sera le rectangle demandé.

22ᵉ Problème. (*Fig.* 35). *Inscrire dans un triangle* ABC, *un rectangle dont le rapport des côtés soit donné.*

D'un point quelconque M pris sur AB, abaissez MP perpendiculaire sur AC, et formez le rectangle MPQR dont les côtés soient dans le rapport donné; joignez AQ, et prolongez AQ jusqu'à la rencontre de BC en X; menez les lignes XY et XZ, parallèles à QM et QR; elles seront dans le même rapport, et XYKZ sera le rectangle demandé.

Lorsque le rapport donné est l'unité, le rectangle devient un carré.

23ᵉ Problème. (*Fig.* 36). *Mener une tangente commune à deux cercles* A *et* B.

Soit MN cette tangente. Les rayons AM, BN étant parallèles, le point O de rencontre des prolongemens des droites AB, MN, sera tel que

$$OB : OA :: BN : AM.$$

On pourra donc déterminer le point O en menant deux rayons quelconques AX, BY parallèles et dirigés dans le même sens, en joignant les points X, Y par une droite, et prolongeant cette ligne jusqu'au point O, où elle rencontre ABO.

Le point O étant connu, on mènera par ce point une tan-

gente à l'un des cercles, elle le sera à l'autre. Il est clair qu'il y aura deux solutions symétriques par rapport à AB.

La tangente commune pourrait avoir la position PQ, et le point R se déterminerait encore en menant deux rayons quelconques parallèles, mais dirigés en sens contraire; il y en aurait de même une seconde symétrique.

Si les cercles étaient tangens extérieurement, il n'y aurait que trois solutions; s'ils se coupaient, il n'y en aurait que deux; s'ils se touchaient intérieurement, il n'y aurait qu'une solution; enfin, si l'un était intérieur à l'autre, il n'y en aurait aucune.

24ᵉ Problème. *Décrire un cercle tangent à trois droites indéfinies.*

Un cercle tangent à deux droites, ayant son centre sur la ligne qui divise leur angle en deux parties égales, on tirera des droites qui divisent deux des angles en deux parties égales, du côté où l'on voudra que le contact ait lieu, et le point de rencontre de ces deux droites déterminera le centre.

Il est indifférent lesquels on prenne des trois angles, parce que les droites qui les partagent en deux parties égales, concourent en un même point.

Si les trois lignes données se coupent deux à deux, il y aura quatre solutions; si deux sont parallèles, il n'y en aura que deux; et aucune, si les trois droites sont parallèles.

Nous verrons plus tard que dans le cas où les droites se coupent deux à deux, le produit des quatre rayons des cercles tangens à ces droites, est égal au carré de l'aire du triangle déterminé par ces droites.

Théorème. (*Fig.* 37). *Si l'on prend trois à trois les côtés d'un quadrilatère, et qu'on inscrive des cercles dans chacun de ces systèmes, les centres des quatre cercles qui en résulteront seront sur un même cercle*; car si l'on partage les quatre angles A, B, C, D, du quadrilatère en deux parties égales par des droites, les rencontres de ces droites donneront les quatre centres M, N, P, Q, et il suffit de prouver que la somme des angles α, β, est égale à deux droits. Or, α est supplément de $\gamma + \delta$, et β l'est de $\varepsilon + \theta$; donc $\alpha + \beta$ est supplément à quatre droits de la

somme des demi-angles γ, δ, ϵ, θ du quadrilatère ; donc $\alpha + \mathcal{C}$ est égal à deux droits ; et par conséquent le quadrilatère MNPQ est inscriptible dans un cercle.

25ᵉ Problème. (*Fig.* 38). *Décrire un cercle tangent à une droite donnée* XY, *passant par un point donné* A, *et d'un rayon donné* R.

Son centre sera sur une parallèle à XY, menée à la distance R de XY ; de plus, il sera sur la circonférence décrite de A comme centre avec le même rayon ; il sera donc déterminé, et par suite le cercle cherché.

Il pourra y avoir deux solutions, une seule, ou aucune.

La condition d'impossibilité sera que le rayon R soit moindre que la moitié de la perpendiculaire AP à XY.

26ᵉ Problème. (*Fig.* 39). *Par deux points donnés* A, B, *mener un cercle tangent à la droite* XY.

Prolongez BA jusqu'à XY en M, la tangente partant du point M devant être moyenne proportionnelle entre la sécante MB et sa partie extérieure MA, on en trouvera facilement la longueur ; la portant de M en C sur XY, on aura le point C de contact ; et il ne s'agira plus que de faire passer un cercle par trois points A, B, C, connus.

Il y aura deux solutions, parce qu'on peut porter la tangente de part et d'autre du point M. Il n'y en aurait qu'une seule si AB et XY étaient parallèles.

27ᵉ Problème. (*Fig.* 40). *Décrire un cercle tangent à deux droites, et passant par un point donné* A.

Abaissant de A une perpendiculaire AP, sur la ligne CG qui divise l'angle DCE donné, en deux parties égales, et la prolongeant d'une quantité PB = PA, on aura un second point B du cercle ; il ne s'agira plus que de mener par A et B un cercle tangent à l'une des deux droites CD, CE.

Il y aura donc deux solutions quand les droites se couperont, et une seule quand elles seront parallèles.

28ᵉ Problème. (*Fig.* 41). *Décrire un cercle qui passe par deux points* A, B, *et qui soit tangent à un cercle donné* C.

Faites passer par A et B un cercle quelconque qui coupe le

cercle donné en M et N ; tirez MN jusqu'à la rencontre de AB en D, et menez par D une tangente DK au cercle C ; le point K sera le point de contact du cercle cherché avec le cercle C ; car DK est moyenne proportionnelle entre DN et DM, et par suite entre DB et DA ; le cercle passant par les trois points A, B, K, sera donc tangent à la droite DK, et par conséquent au cercle C.

Comme on peut mener par le point D deux tangentes au cercle C, à moins que ce point ne soit sur ce cercle même, il y aura généralement deux solutions.

29e Problème. (*Fig.* 42). *Par un point donné* A, *faire passer un cercle tangent à une droite et à un cercle donnés.*

Soient XY et C, la droite et le cercle donnés. Supposons que M, N soient les points de contact cherchés, qu'on tire la droite MN et qu'on la prolonge jusqu'au cercle C, en P ; les triangles CPN, MNO seront semblables, parce que les cordes PN, MN sont dans le rapport des rayons ; CP sera donc parallèle à MO, c'est-à-dire perpendiculaire sur XY ; on peut donc déterminer *à priori* le point P. Si on le joint au point A, il ne restera plus qu'à trouver le point Z où PA doit couper le cercle cherché. Or, le rectangle PA × PZ est égal à PN × PM ; et celui-ci est égal à PK × PH, à cause des triangles semblables PKN, PHM. Le rectangle PA × PZ étant donc connu, PZ s'ensuivra, et on fera passer par les deux points A, Z, un cercle tangent à XY.

Il y aura deux solutions pour le contact extérieur des cercles, et deux autres pour leur contact intérieur.

30e Problème. (*Fig.* 43). *Faire passer un cercle par un point donné* X, *tangentiellement à deux cercles donnés.*

Soient A, B les centres des cercles donnés ; supposons le problème résolu et que O soit le centre du cercle cherché, et M, N les deux points de contact ; tirez la droite MN, et prolongez-la indéfiniment, elle coupera le prolongement de AB en un point K. Je dis qu'on peut déterminer ce point *à priori*, car si l'on joint AQ, BP, les trois triangles isocèles AQM, MON, BNP, seront semblables ; BP sera donc parallèle à AM ; et par conséquent le point K peut être construit en joignant les extrémités de deux rayons parallèles quelconques.

Cela posé, que l'on joigne XK, tout se réduira à trouver KY, parce qu'il suffira alors de mener un cercle tangent à l'un des cercles proposés par les deux points X et Y. Or, le rectangle KX × KY est égal à KM × KN; celui-ci est égal à KR × KS, car PV étant parallèle à MR, l'angle α est égal à γ. Or, $\gamma = \beta$ comme supplémens d'un même angle P; donc $\alpha = \beta$, et par conséquent $\alpha + \delta = 200°$. Donc le quadrilatère RMNS est inscriptible, et par suite KN × KM = KS × KR. Le rectangle KX × KY étant alors connu, le point Y s'en déduit, et le problème est résolu.

Ce problème est susceptible en général de quatre solutions, suivant que les cercles donnés devront être à la fois, soit intérieurs, soit extérieurs au troisième, ou bien l'un intérieur et l'autre extérieur. Nous nous dispenserons d'examiner les cas où quelques-unes des solutions deviennent égales ou impossibles.

31ᵉ Problème. (*Fig.* 44). *Décrire un cercle tangent à deux cercles donnés* A, B, *et qui touche une droite donnée* XY.

Soit O le cercle inconnu. Si l'on conçoit que le rayon de ce dernier augmente de MB, on aura un nouveau cercle qui aura le même centre O, passera par le point B, sera tangent à un cercle décrit du centre A, avec un rayon égal à la différence des deux rayons donnés, et à une droite parallèle à XY, menée en dessous à la distance MB de XY; on pourra donc déterminer ce cercle par une des constructions précédentes; et le centre O étant connu, le problème proposé sera résolu.

Le problème est susceptible de quatre solutions, sauf les cas d'impossibilité partielle ou absolue.

32ᵉ Problème. (*Fig.* 45). *Décrire un cercle tangent à deux droites* AX, AY, *et à un cercle* O.

Soit B le centre du cercle cherché; si l'on augmente son rayon de MO, on aura un nouveau cercle concentrique, passant par le point O, et tangent à deux droites parallèles à AX et AY, à la distance MO de chacune d'elles. Le centre O se déterminera donc par une des constructions précédentes.

Ce problème est susceptible de quatre solutions.

33ᵉ Problème. (*Fig.* 46). *Décrire un cercle tangent à trois cercles donnés.*

Soient A, B, C les trois cercles donnés, et O le cercle cherché. Si l'on augmente son rayon de l'un des trois rayons donnés, du plus petit par exemple, qui est celui du cercle C, le problème sera ramené à faire passer un cercle par le point C, tangentiellement à deux autres, ayant leurs centres en A et B, et pour rayons les différences des deux plus grands rayons donnés au plus petit.

Ce problème est susceptible de huit solutions; il peut en avoir moins, et même n'en avoir aucune.

34ᵉ Problème. (*Fig.* 47). *Décrire dans un cercle donné un nombre quelconque m de cercles égaux qui soient tangens entre eux et au cercle donné* A.

Soient B, C, etc. les centres des cercles demandés; les points de contact D, E, etc., partageront la circonférence du cercle A en *m* parties égales. Supposant cette division faite, on trouvera les centres B, C, en observant que la ligne BC est parallèle à DE et égale à BD + CE; ce qui ramène à un des problèmes précédens.

Théorème. (*Fig.* 48). *La somme des distances de deux points fixes* A, B, *à un point* M *d'une circonférence donnée, est un minimum lorsque les deux droites* AM, BN *font des angles égaux avec le rayon* CM; car les lignes AM, MB faisant alors des angles égaux avec la tangente en M, la somme AM + MB est un minimum pour tous les points de la tangente, et à plus forte raison pour tous les points du cercle qui est au-delà.

35ᵉ Problème. (*Fig.* 49). *Trouver un point* O *tel, que la somme de ses distances à trois points donnés* A, B, C, *soit un minimum.*

La somme AO + CO + BO étant minimum, si on laisse AO constant, il faudra que BO + CO soit aussi un minimum. Or, le point O décrit alors une circonférence dont A est le centre; il faut donc, d'après le théorème précédent, que BO et CO fassent des angles égaux avec AO. On verrait de même que CO doit faire des angles égaux avec AO et BO; de sorte que les trois angles en O doivent être égaux entre eux, et par suite à $\frac{4}{3}$ d'angle

droit. On aura donc le point O en décrivant sur les côtés AB, AC, BC, des segmens capables de $\frac{4}{3}$ d'angle droit.

36e Problème. (*Fig.* 50). *Trouver un point* O, *dont la somme des distances à deux points* A, B, *et à une droite* XY, *soit un minimum.*

Tirez les droites OA, OB, et la perpendiculaire OK sur XY. Il est facile de voir que la somme des distances de O aux points A, B, K, sera un minimum; donc, d'abord les trois angles en O seront égaux. De plus, les droites AOQ, BOP doivent faire le même angle avec XY; car si l'on mène une parallèle à XY par O, il faudra que AO + OB soit un minimum pour tous les points de cette parallèle; les deux angles P, Q, étant égaux, et l'angle O étant de $\frac{4}{3}$, ils vaudront chacun $\frac{1}{3}$; il suffira donc de tirer deux droites AQ, BP, qui fassent cet angle avec XY.

37e Problème. *Trouver un point* O, *dont la somme des distances à deux droites* BE, BG *et à un point* A (fig. 51), *ou à trois droites* (fig. 52), *soit un minimum.*

1°. Abaissant les perpendiculaires OC, OD sur BE et BG (*fig.* 51), on verra comme précédemment, que la somme des distances de O aux points A, D, C, devra être un minimum, et que par conséquent, les trois angles en O vaudront chacun $\frac{4}{3}$. Les deux angles C et D étant droits, il faudra nécessairement que l'angle B soit égal à $\frac{2}{3}$; sans quoi le problème serait impossible.

Supposant donc $B = \frac{2}{3}$, on verra, comme précédemment, que AO et CO devront faire le même angle avec BG, et cet angle sera $\frac{1}{3}$; la ligne AO doit donc être parallèle à celle qui divise l'angle B en deux parties égales, et tous ses points seront tels, que la somme demandée sera un minimum.

Le problème sera donc impossible ou indéterminé.

2°. Dans le cas de trois droites AB, AC, BC (*fig.* 52), il fau-

dra encore que les trois angles en O soient de $\frac{4}{3}$; ce qui exige que les trois angles A, B, C soient égaux chacun à $\frac{2}{3}$. Donc d'abord le problème est impossible si le triangle ABC n'est pas équilatéral. Quand cette condition est remplie, la somme des distances est constante pour tous les points du triangle et égale à sa hauteur.

Nota. Dans tous ces problèmes sur les minima, les élèves devront supposer au point cherché toutes les positions qu'il peut avoir par rapport aux données, et examiner dans quels cas les sommes des lignes se changeront en des différences.

38e Problème. (*Fig.* 53). *Construire un triangle rectangle tel, qu'un des côtés soit moyen proportionnel entre l'hypoténuse donnée* AB, *et l'autre côté.*

On aura $\quad AC : CB :: CB : AB.$

Ce qui revient à

$$AC : \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2} :: \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2} : AB.$$

On en tire

$AC \times AB = \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2$, ou $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + AC \times AB = AC(AC + AB)$.

Or AB est donné, on connaît donc la surface du rectangle $AC \times (AC + AB)$, et la différence AB de ses côtés; on pourra donc déterminer AC, et le problème sera résolu.

39e Problème. (*Fig.* 54). *D'un point* A *donné hors d'un cercle* B, *mener par ce point une sécante telle, que la corde soit moyenne proportionnelle entre la sécante entière et sa partie extérieure, ou bien telle, que les deux segmens soient dans le rapport de* m *à* n.

1°. Puisque l'on doit avoir $\overline{MN}^2 = AM \times AN$, MN sera égale à la tangente menée par A, au cercle B; inscrivant donc cette longueur d'une manière quelconque dans le cercle, et lui menant du centre B un cercle tangent, il suffira de tirer par le point A des tangentes à ce dernier; elles satisferont à la question, et seront partagées en moyenne et extrême raison.

2°. Si l'on demande que

$$AM : MN :: m : n,$$

on en déduira

$$AM : AN :: m : m + n.$$

Il ne s'agira donc plus que de construire un rectangle $AM \times AN$, connaissant le rapport de ses côtés et sa surface, qui est égale au carré de la tangente : problème qui revient à faire une figure semblable à une figure donnée, et équivalente à une autre, aussi donnée.

40ᵉ Problème. (*Fig.* 55). *Partager la surface d'un cercle en m parties équivalentes.*

Partagez le diamètre AB en m parties égales, et décrivez des demi-cercles sur les distances de ces points de division aux extrémités de AB, d'un même côté à partir de A, et de l'autre à partir de B; les surfaces comprises entre deux lignes consécutives, telles que $AmcnB$, $Am'c'n'B$, seront égales, comme on le verra facilement, en prenant l'expression générale de ces surfaces.

De plus, chacune des lignes $AmcnB$, $Am'c'n'B$, etc., sera égale à la demi-circonférence donnée.

41ᵉ Problème. (*Fig.* 56). *Etant donnés deux points* A, B, *sur deux parallèles, et un point* C *au-dehors, tirer par ce point une sécante* CXY *telle, que l'on ait* $AX : BY :: m : n$.

Sur la droite indéfinie BAD, prenez un point M tel que l'on ait $MA : MB :: m : n$; la droite MCY sera la sécante demandée.

42ᵉ Problème. (*Fig.* 57). *D'un point* A *donné hors d'un cercle, mener une sécante, telle que* $AB \times BC$ *soit égal à un carré donné* m^2.

Le rectangle $AB \times AC$ étant égal au carré de la tangente, si l'on remplace BC par $AC - AB$, on verra que m^2 est égal au carré de cette tangente, moins le carré de AB; on connaîtra donc ce dernier, et le problème sera résolu.

43ᵉ Problème. (*Fig.* 58). *Trois droites* AB, BC, AC, *étant données, en mener une troisième* XZ *telle que les parties* XY, YZ, *soient égales à des lignes connues*, α, β.

Prenez sur une droite indéfinie MN (*fig.* 58 *bis*) deux parties $KH = \alpha$, $HL = \mathit{6}$; décrivez sur ces parties des segmens capables des angles B, C, et par le point de rencontre H des deux cercles, tirez une sécante UV égale à BC; joignez KV, VL; vous aurez la construction demandée, et il ne restera plus qu'à reporter sur la figure donnée ABC.

44ᵉ Problème. (*Fig.* 59). *Trouver tous les points tels que la somme ou la différence des carrés de leurs distances à deux points fixes* A, B, *soit égale à* m^2.

1°. Soit M un point tel, que $\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = m^2$, et O le milieu de AB. En abaissant la perpendiculaire MP sur AB, on aura

$$\overline{MA}^2 = \overline{MP}^2 + (AO + OP)^2, \text{ et } \overline{MB}^2 = \overline{MP}^2 + (AO - OP)^2.$$

La somme $\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2$, étant égale à m^2, on aura,

$$2\overline{MP}^2 + 2\overline{AO}^2 + 2\overline{OP}^2 = m^2; \text{ d'où } \overline{MP}^2 + \overline{OP}^2 = \tfrac{1}{2}m^2 - \overline{AO}^2.$$

Donc $\overline{MP}^2 + \overline{OP}^2$ est constant, donc OM est constant; le lieu des points demandés est donc un cercle décrit du centre O, avec un rayon $OM = \sqrt{\tfrac{1}{2}m^2 - \overline{AO}^2}$.

2°. Si $\overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 = m^2$, on aura aussi $\overline{AP}^2 - \overline{PB}^2 = m^2$, d'après les valeurs de MA et MB. Il suffira donc de trouver un point de AB, qui convienne à la condition demandée; et la perpendiculaire abaissée de ce point sur AB, sera le lieu cherché. Soit P ce point, on aura

$$\overline{AP}^2 - \overline{PB}^2 = m^2 = (AP + PB)(AP - PB).$$

Or, $AP + PB$ est connu; on trouvera donc $AP - PB$; on en tirera facilement AP et PB.

Le point P ne pourra être entre A et B, qu'autant qu'on aura $m < AB$; dans le cas contraire, il serait en P′, sur le prolongement de AB, et la relation précédente se changerait en

$$m^2 = (AP' + BP')(AP' - BP'),$$

où l'inconnue serait $AP' + BP'$.

45ᵉ Problème. (*Fig.* 60). *Etant donnés deux cercles, trouver les points tels que les tangentes tirées de ces points aux deux cercles, soient égales.*

Puisque les tangentes MN, MP, sont égales, on a

$$\overline{MA}^2 - \overline{AN}^2 = \overline{MB}^2 - \overline{BP}^2;\quad \overline{MA}^2 - \overline{MB}^2 = \overline{AN}^2 - \overline{BP}^2.$$

Donc la différence des carrés de MA et MB est constante; le lieu des points M est donc une ligne droite perpendiculaire sur AB, et qu'on déterminerait comme précédemment.

La solution serait la même si l'on demandait que les carrés des tangentes eussent une différence constante.

46ᵉ Problème. (*Fig.* 61). *Etant donnés deux cercles* A, B, *leur mener des tangentes qui se coupent sur une droite donnée* XY, *et fassent avec elle des angles égaux.*

Construisez un cercle O symétrique de l'un des deux cercles donnés par rapport à XY, et menez des tangentes communes au second cercle donné et à celui que vous venez de décrire, elles détermineront sur XY les points M, N, P, Q, d'où doivent partir les tangentes cherchées.

Théorème. (*Fig.* 62). *Lorsque trois cercles se coupent deux à deux, les trois cordes* AB, CD, EF, *d'intersection se rencontrent en un même point.*

En effet, soit O le point de rencontre de CD et AB, on aura $AO \times OB = OD \times OC$. Tirez la droite FO, et soit E le point où elle coupe la circonférence K, on aura $FO \times OE = DO \times OC$; donc, d'après la relation précédente, on aura l'égalité..... $FO \times OE = OB \times OA$; et par conséquent le point E est aussi sur la circonférence H. Donc, les trois cordes CD, EF, AB, se rencontrent en un même point O.

47ᵉ Problème. (*Fig.* 63). *D'un point* A, *on mène des sécantes à un cercle donné, et des tangentes par les points de rencontre; on demande le lieu des rencontres deux à deux de ces tangentes.*

Soit X le point d'intersection de deux de ces tangentes. En abaissant XP perpendiculaire sur AO, les deux triangles OPX,

OKA seront semblables et donneront

$$OP : OX :: OK : OA, \quad \text{d'où} \quad OP \times OA = OX \times OK.$$

Mais le triangle OMX étant rectangle, on a

$$OX \times OK = \overline{OM}^2; \quad \text{donc} \quad OP \times OA = \overline{OM}^2.$$

Donc OP est constant; et par conséquent le lieu cherché est une droite perpendiculaire sur OA, qu'on obtiendra d'après la valeur de OP en menant deux tangentes par le point A, et joignant leurs points de contact.

48ᵉ Problème. (*Fig.* 64). *Par un point donné* A, *on mène des droites à tous les points d'un cercle* O, *et on partage ces droites dans le rapport constant de* α *à* ζ; *on demande le lieu des points de division.* Soit M un point quelconque du cercle O; prenez sur AM un point X tel, que $AM : AX :: \alpha : \zeta$.

Tirez XK parallèle à OM, vous aurez

$$AO : AK :: \alpha : \zeta, \quad \alpha : \zeta :: OM : KX.$$

Ces deux dernières proportions démontrent que AK et KX sont constans. Le lieu sera donc un cercle décrit du centre K avec un rayon qui soit au rayon donné dans le rapport de ζ à α.

49ᵉ Problème. (*Fig.* 65). *On donne une droite* XY *et un cercle; on demande de mener par l'extrémité* A *d'un diamètre* APQ *perpendiculaire à* XY, *une sécante telle, que la partie comprise entre la droite et le cercle soit égale à une quantité donnée.*

Soit AN cette sécante; les triangles semblables AMP, ANQ donneront $AM \times AN = AP \times AQ$. On connaîtra donc le produit et la différence MN des deux lignes AM, AN; on pourra donc les déterminer.

La construction serait la même si XY était une sécante au cercle.

Théorème. *Les perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés d'un triangle se coupent en un même point.* Car elles passent toutes les trois par le centre du cercle circonscrit.

Théorème. (*Fig.* 66). *Les trois hauteurs d'un triangle concourent en un même point.* Car si par les trois sommets A, B, C, on mène des parallèles aux côtés opposés, on formera un triangle

MNP dont les points A, B, C seront les milieux des côtés; les trois hauteurs du triangle ABC seront donc les perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés du triangle MNP; elles concourront donc en un même point.

Théorème. *Les lignes qui divisent les trois angles d'un triangle en deux parties égales, concourent en un même point.*

En effet, soit O (*fig.* 67) le point de rencontre de deux de ces lignes, on aura OE$=$OD, OD$=$OF, et par conséquent OE$=$OF. La droite CO divise donc l'angle BCA en deux parties égales.

Théorème. *Les droites qui joignent les sommets d'un triangle avec les milieux des côtés opposés, se rencontrent en un même point.*

En effet, soit O (*fig.* 68) le point de rencontre de deux de ces lignes AN, CM; la droite qui joindra B au milieu de AC passera par le milieu de MN; il suffira donc de prouver que les milieux K, H, de MN et de AC sont en ligne droite avec le point O. Pour cela, tirez la droite KO, les triangles semblables donneront

$$MK : HC :: OK : OH, \quad KN : AH :: OK : OH;$$

d'où $MK:HC::KN:AH$. Or $MK=NK$, donc $AH=HC$;

ce qui démontre le théorème énoncé.

Nota. Les proportions précédentes ne supposant pas que MN passe par les milieux des côtés BA, BC, mais soit seulement parallèle à AC, il s'ensuit que toutes les couples de lignes droites joignant A et C à des points qui partagent BA et BC dans le même rapport, se coupent sur la droite qui joint le sommet B avec le milieu de la base.

50[e] Problème. (*Fig.* 69). *Deux droites* AB, AC, *qui font entre elles un angle constant, passent par un point fixe* A; *on demande quelle ligne décrit le point* B, *quand le point* C *se meut sur une ligne donnée, droite ou courbe, et que le rapport* $\frac{AB}{AC}$ *reste constant.*

Imaginons sur AB un point C′ tel, que AC′$=$AC, il décrira

une ligne semblable à celle que décrit B; leur centre de similitude sera A, et le rapport de similitude sera $\frac{AB}{AC}$. Il est évident qu'on aura le lieu décrit par C en faisant tourner la ligne décrite par C', de l'angle CAB autour du centre A.

51ᵉ Problème. *Trouver un point tel, que ses distances à trois autres points* A, B, C, *soient dans des rapports donnés.*

On cherchera le lieu des points tels que leurs distances aux points A, B, soient dans le rapport donné; on fera la même chose pour B et C; ces lieux seront deux circonférences que l'on sait construire, et le problème pourra avoir deux solutions, ou une seule, ou aucune.

52ᵉ Problème. (*Fig.* 70). *Etant donnés un cercle* O *et un point* A, *trouver le lieu des points* N *tels, qu'en tirant la droite* AN, *l'on ait*

$$AM \times AN = m^2.$$

En désignant par n la longueur de la tangente AT menée de A au cercle donné, on aura

$$AM \times AK = n^2.$$

Or $\quad AM \times AN = m^2$; donc $AK : AN :: n^2 : m^2$.

Le rapport de AK à AN étant constant, le lieu des points N sera, comme nous l'avons déjà vu, un cercle.

Si le point A était dans l'intérieur du cercle donné, on aurait encore un cercle. S'il était sur la circonférence même, on aurait, comme nous l'avons déjà vu, une droite perpendiculaire à la ligne AO.

53ᵉ Problème. (*Fig.* 71). *Par un point donné* A, *on tire une droite quelconque* AB, *terminée à une droite donnée* XY; *on mène* AC *telle, que l'angle* BAC *soit égal à un angle donné et que l'on ait* $AB \times AC = m^2$; *on demande le lieu des points* C.

Abaissez la perpendiculaire AP; tirez la droite AD qui fasse l'angle donné, avec AP, et telle que $AP \times AD = m^2$. Joignez DC; les deux triangles APB, ACD seront semblables, comme ayant un angle égal compris entre côtés proportionnels; l'angle C sera

donc égal à P, et par conséquent droit. Le lieu des points C sera donc une circonférence décrite sur AD comme diamètre.

54e **Problème.** (*Fig.* 72). *Trouver les points d'où deux cercles donnés seront vus sous le même angle.*

Soit M un de ces points; si l'on en fait partir des tangentes aux deux cercles, elles devront former entre elles le même angle; les deux triangles AKM, HMD seront donc semblables, et l'on aura KM : MH :: AK : HD.

Ce rapport étant constant, on sait que le lieu cherché est un cercle.

Si l'on demandait le point d'où trois circonférences seraient vues sous le même angle, on l'obtiendrait par l'intersection de deux cercles construits comme le précédent.

55e **Problème.** *Par un point* A, *pris dans l'intérieur d'un angle donné* B (*fig.* 73), *tirer une droite* ZU *telle, que la surface du triangle* ZBU *soit égal à* m^2.

Formez le parallélogramme AKBH, et faites-en un égal adjacent ALMH. Le triangle ALQ étant égal à ZAK, le triangle ZBU est équivalent au parallélogramme connu KBML, plus le triangle QMU dont la surface se trouve alors déterminée. Or QMU est semblable à ZBU, et ils sont par conséquent dans le rapport de $\overline{UM}^2$ à $\overline{UB}^2$; ce rapport est donc connu, et par suite celui de UM à UB; on peut donc déterminer le point U.

Si le point A était extérieur (*fig.* 73 *bis*), on formerait de même les deux parallélogrammes égaux AKBH, HLMB, et tirant HZ parallèle à la droite cherchée AV, le triangle UZK aurait une surface connue, comme équivalente à MPZ qui est égal à BTV, plus le parallélogramme KALM; on rentre donc dans le cas précédent par rapport au point H et aux deux lignes KS, KY.

56e **Problème.** (*Fig.* 74). *Par un point* M *pris sur la ligne qui divise l'angle* XAY *en deux parties égales, tirer une droite telle, que la partie comprise dans cet angle soit un minimum, ou que le triangle qu'elle détermine soit un minimum.*

1°. Tirez BC faisant des angles égaux avec AX, AY; je dis que toute autre droite DE sera plus grande; car si vous menez la sy-

métrique HF; vous aurez un trapèze DFEH dans lequel BC sera plus près de DH que de FE, puisqu'on a $DM < ME$; donc

$BC < \frac{1}{2}(DH + FE)$; or $DH < DM + MH$ et $FE < FM + ME$;

donc $DH + FE < DE + FH$, et par conséquent $BC < DE$.

2°. La même ligne BC détermine le triangle minimum demandé, car le triangle MCE est plus grand que BMD, puisqu'ils ont des bases égales BM, MC, et que la perpendiculaire abaissée du point E sur BC est plus grande que celle abaissée du point D.

57° Problème. (*Fig.* 75). *Mener dans un angle donné* A *une droite minimum qui détermine un triangle dont la surface soit égale à* m^2.

Si une droite BC fait des angles égaux avec les côtés AX, AY, je dis que toute droite qui déterminera un triangle équivalent à ABC sera plus grande. En effet, soit MN une de ces lignes; le point O où elle coupe BC doit être plus près de C que de B, sans quoi, d'après ce qui précède, MN serait prouvé plus grand que BC. Tirez les parallèles MD, NP, à BC; le triangle OCN doit être équivalent à MOB, et ayant une hauteur moindre, il faut que la base CN soit plus grande que BM, ou que son égale DC; donc $BC < \frac{1}{2}(MD + PN)$. Or on verrait comme précédemment que $MN > \frac{1}{2}(MD + PN)$; donc $MN > BC$.

Il suit de là que pour résoudre le problème, il faut faire sur les côtés AX, AY un triangle isocèle équivalent à la surface donnée; ce qui n'offre aucune difficulté.

58° Problème. (*Fig.* 76). *Par deux points* A, B, *pris hors d'un cercle donné, mener deux sécantes qui se coupent en* M *sur le cercle et telles, que la corde* XY *soit parallèle à une ligne donnée.*

Supposez XK parallèle à AB, et tirez la droite KYO; les angles O, K, M seront égaux, et les triangles semblables OBY, ABM donneront $BO \times BA = BY \times BM$; on pourra donc déterminer *à priori* le point O, et il ne restera plus qu'à mener une sécante OK telle, que l'arc KY corresponde à un angle inscrit égal à KXY, qui est celui formé par la direction donnée avec AB. Pour cela, on inscrira d'une manière quelconque cet angle dans

le cercle, et on connaîtra ainsi la valeur de la corde KY; la sécante OK, se mènera alors comme nous l'avons déjà vu.

59ᵉ Problème. (*Fig.* 77). *Inscrire dans un cercle donné un triangle* MXY *dont les côtés prolongés passent par trois points donnés* A, B, C.

Si l'on suppose XN parallèle à AB, la sécante NYD coupera AB en un point O qu'on déterminera comme dans le problème précédent; le point X se déterminera donc en menant par les deux points O et C des sécantes telles, que la corde XN soit parallèle à AB; ce qui revient au problème précédent.

On peut généraliser ce problème et chercher, par des procédés analogues, à inscrire dans un cercle donné un polygone d'un nombre quelconque de côtés qui soient astreints à passer tous, par des points donnés. Nous nous dispenserons d'en donner la solution.

60ᵉ Problème. (*Fig.* 78). *D'un point donné* A, *mener une sécante* AMN *à deux droites données* BY, BX, *de manière que le rectangle* AM × AN, *soit égal à* m^2.

Cherchez le lieu des points Z, tels que AU × AZ, soit égal à m^2; ce lieu sera, comme nous l'avons vu, un cercle passant par A; et le point N sera déterminé par la rencontre de ce cercle avec BX.

La surface donnée m^2 peut être aussi grande qu'on voudra; mais sa petitesse a une limite, parce que le produit AM × AN a un minimum. Pour obtenir ce minimum, on abaissera sur BY la perpendiculaire AK, qui doit passer par le centre du cercle; on mènera un cercle tangent à BX, passant par A, et ayant son centre sur AK; il sera le plus petit qu'il puisse être pour rencontrer BX, et déterminera le minimum du produit AM×AN.

61ᵉ Problème. (*Fig.* 79). *Un trapèze* ABCD *étant donné, mener une parallèle* XY *à* CD, *qui divise sa surface en deux parties qui soient dans le rapport connu de* m *à* n.

On a $$AXYB : ACDB :: m : m+n.$$

Or, OAB est à ACDB dans un rapport connu, puisque ces surfaces sont connues; on connaît donc le rapport de OAB à AXYB,

et par suite de OAB à OXY, ou de $\overline{OA}^2$ à $\overline{OX}^2$, et enfin de OA à OX. On pourra donc déterminer le point X.

62e PROBLÈME. *Partager un quadrilatère quelconque* ABDC *en deux parties qui soient dans le rapport de* m *à* n, *par une parallèle ou par une perpendiculaire à l'un des côtés.*

1°. Soit XY la ligne cherchée parallèle à CD (*fig.* 80); le rapport de AXYB à ACDB, sera celui de m à $m+n$, et la construction se fera comme dans le cas précédent.

2°. Soit XY perpendiculaire sur CD (*fig.* 81); les surfaces des deux parties pouvant toujours être déterminées, si l'on abaisse la perpendiculaire AK à CD, la partie AXYK sera encore connue, et le problème reviendra au précédent.

THÉORÈME. (*Fig.* 82). *Si de tous les sommets d'un polygone régulier, on tire des perpendiculaires sur une droite donnée* MN, *leur somme (en donnant le signe + à toutes les perpendiculaires situées d'un côté de la droite donnée, et le signe — à celles qui tombent de l'autre côté de cette droite), sera égale à la perpendiculaire abaissée du centre du cercle circonscrit, multipliée par le nombre des côtés.* En effet;

1°. Supposons d'abord le nombre des côtés pair et égal à $2m$; les sommets seront les extrémités de m diamètres, et d'après une propriété connue du trapèze, la somme des perpendiculaires sera égale à deux fois la perpendiculaire abaissée du centre, multipliée par le nombre des diamètres, ou à $2m$ fois cette perpendiculaire.

2°. Supposons le nombre des côtés impair, et égal à n; formons un polygone régulier de $2n$ côtés, tel qu'en joignant leurs milieux de trois en trois, le polygone régulier résultant soit égal au proposé; la somme des perpendiculaires abaissées des sommets A, B, C, D, etc. (*fig.* 82 *bis*) du polygone de $2n$ côtés, sera double de celles abaissées des sommets m, n, p, etc., du polygone de n côtés; et la première somme étant égale à $2n$ fois la perpendiculaire abaissée du centre, la seconde sera égale à n fois la même perpendiculaire. Ce qu'il fallait démontrer.

Si l'on conçoit que la droite donnée MN s'élève parallèlement à elle-même, toutes les perpendiculaires diminueront d'une

même quantité, et par conséquent les deux membres de l'égalité diminueront également; le théorème aura donc toujours lieu, en considérant comme négatives les perpendiculaires qui passeront de l'autre côté de la droite mobile, parce qu'elles auront été diminuées de plus que leur grandeur.

Lorsque la droite passera par le centre, on aura ce théorème que *la somme des perpendiculaires abaissées des sommets d'un polygone régulier, inscrit ou circonscrit, sur un diamètre quelconque, est égale à zéro.*

Théorème. *La somme des perpendiculaires abaissées d'un point intérieur sur les côtés d'un polygone régulier de* m *côtés, est égale à* m *fois le rayon du cercle inscrit.* Car la somme des triangles ayant pour sommet ce point intérieur, et pour bases les côtés du polygone, sera égale à l'un des côtés multiplié par la demi-somme des perpendiculaires. Or, l'aire totale est aussi égale au périmètre multiplié par la moitié du rayon du cercle inscrit. On en conclut le théorème proposé.

Si le point A était extérieur, l'aire du polygone serait la différence entre la somme des triangles partant de A, et ayant pour bases la partie concave vers A, et la somme de ceux qui auraient pour bases la partie convexe. Donc il faudra prendre, dans ce cas, la différence entre les sommes des perpendiculaires abaissées de A sur la partie concave et sur la partie convexe du polygone; cette différence sera égale à m fois le rayon du cercle inscrit.

Si le polygone donné n'était pas régulier, mais avait ses côtés égaux, la somme des perpendiculaires serait encore constante et égale au double de la surface, divisé par le côté.

63ᵉ Problème. (*Fig.* 83). *Construire un triangle connaissant deux côtés et la longueur de la ligne qui divise leur angle en deux parties égales.*

Soient a, b les deux côtés donnés; le troisième sera divisé dans le rapport de ces côtés; on fera donc facilement une figure semblable à la figure cherchée, en prenant deux parties AB, BC dans le rapport de a à b, et cherchant un point M dont les distances aux points A, B, C, soient dans le rapport des trois

droites données. Cela fait, on prendra $MH = a$, on tirera HK parallèle à AB, et MHK sera le triangle cherché.

64ᵉ Problème. (*Fig.* 84). *Construire un triangle connaissant le côté* $AB = a$, *l'angle* B, *et la somme ou la différence des deux autres côtés.*

1°. Prenez BM égal à la somme donnée des deux côtés; joignez MA et élevez une perpendiculaire HO sur le milieu de MA, le point de rencontre O avec BM sera tel, que $BO + OA$ sera égal à la somme donnée.

2°. Portez la différence donnée de B en N, et élevez une perpendiculaire KD sur le milieu de NA; BKA, sera le triangle cherché.

65ᵉ Problème. *Construire un triangle connaissant un côté* AB, *un angle* α *et le rapport* $\mathcal{C}$ *des deux autres côtés.*

Le sommet inconnu devra être sur le cercle qui sera le lieu des points dont le rapport des distances aux extrémités A et B sera $\mathcal{C}$; si l'angle donné α est adjacent à AB, on coupera ce cercle par une droite menée par A, et formant l'angle α avec AB; si l'angle α est opposé à AB, on décrira sur AB un segment capable de α, qui déterminera le sommet cherché.

66ᵉ Problème. *Construire un triangle, conniassant son périmètre ou sa surface, et deux angles.*

Vous construirez d'abord un triangle semblable au triangle demandé; vous déterminerez ensuite, l'un des côtés du triangle proposé, par la proportion entre les surfaces de ces triangles, et les carrés de leurs côtés homologues, ou entre leurs périmètres et leurs côtés homologues.

67ᵉ Problème. *Construire un triangle, connaissant les trois hauteurs, c'est-à-dire les trois perpendiculaires abaissées des sommets des angles sur les côtés opposés.*

On sait que dans tout triangle, les hauteurs sont réciproquement proportionnelles aux bases; on connaitra donc les rapports des côtés du triangle cherché, et l'on en pourra faire un semblable. On déterminera ensuite un des côtés cherchés, par une proportion entre deux côtés homologues et les hauteurs correspondantes.

68ᵉ Problème. (*Fig.* 85). *Construire un triangle connaissant la base* AB, *l'angle* γ *au sommet, et la longueur* δ *de la ligne qui divise cet angle en deux parties égales.*

Sur AB décrivez un segment capable de l'angle donné γ, et du milieu C de l'arc inférieur supplémentaire, tirez une corde CN telle que MN soit égale à la ligne donnée δ; ANB sera le triangle demandé; car l'angle N sera divisé par MN, en deux parties égales.

Si l'on donnait la ligne qui divise l'angle supplément, et non l'angle même du triangle, ce serait du point D, milieu de ADB, qu'on mènerait une droite telle que XY = la ligne donnée; le triangle AXB serait le triangle cherché; car XY étant perpendiculaire sur XC, qui divise AXB en deux parties égales, divisera le supplément BXZ en deux parties égales.

69ᵉ. Problème. (*Fig.* 86). *Par trois points* A, B, C, *donnés, faire passer les côtés d'un triangle égal à un triangle donné.*

Sur AB et AC, décrivez des segmens capables de deux des angles du triangle donné, et tirez MN égale au côté adjacent à ces angles. Joignez ensuite MB et NC; MNO sera le triangle demandé.

70ᵉ Problème. (*Fig.* 87). *Etant donnés trois points* A, B, C, *en trouver un quatrième* M, *tel que les surfaces des triangles* AMC, AMB, BMC, *soient dans des rapports donnés.*

Les bases AC, BC étant données, ainsi que le rapport des deux triangles, si l'on tire MK et MH perpendiculaires sur CA et CB, on connaîtra le rapport de MK à MH, et l'on pourra facilement construire la droite indéfinie CMD. On construirait de même la droite indéfinie BME; ce qui déterminera le point M demandé.

71ᵉ Problème. (*Fig.* 88). *Par un sommet* A *donné dans un angle* XOY, *tracer un triangle semblable à un triangle donné, et ayant ses deux autres sommets sur les côtés de l'angle.*

Tirez par A une droite quelconque KH, le problème reviendra à inscrire dans le triangle OKH, un triangle semblable à un triangle donné, et ayant son sommet en A. Ce problème a été résolu précédemment.

72ᵉ Problème. (*Fig.* 89). *Trouver le triangle maximum, connaissant un angle* A *de ce triangle et la demi-somme* α *des côtés qui comprennent l'angle* A.

Tirez BC telle que, $AB=AC=\alpha$; le problème sera résolu, car si AB diminue de BX, AC augmentera de $CY=BX$, et d'après ce que nous avons vu (*page* 266), le triangle OCY sera moindre que BOX; donc ABC sera un maximum.

73ᵉ Problème. (*Fig.* 90). *Trouver le triangle maximum, connaissant la base* AB *et la somme* 2δ *des deux autres côtés.*

Le triangle isocèle AMB, dans lequel $AM=\delta$, est le triangle maximum demandé; car les droites MA, MB, faisant des angles égaux avec la parallèle XY à AB, pour tout autre point N de XY, on aurait $NA+NB>MA+MB$. Tous les sommets des triangles formés avec la somme donnée, seraient au-dessous de XY; ces triangles seraient donc moindres que AMB.

74ᵉ Problème. *Former un triangle maximum, avec un périmètre donné.*

Ce triangle doit avoir ses trois côtés égaux; car si deux côtés étaient inégaux, en laissant le troisième constant, on ferait un triangle plus grand, en conservant le même périmètre, d'après le problème précédent. Le triangle cherché devant être équilatéral, et le périmètre étant connu, on connaîtra les trois côtés.

75ᵉ Problème. (*Fig.* 91). *Trouver la plus petite corde que l'on puisse mener dans un cercle* O, *par un point intérieur donné* A.

La plus petite corde étant la plus éloignée du centre, il suffit de mener par A une perpendiculaire BC sur OA; car pour toute autre direction DAE, la droite OA serait une oblique, et la corde DE étant plus près du centre, on aurait $DE>BC$.

76ᵉ Problème. (*Fig.* 92). *Faire le plus grand rectangle possible avec une somme de côtés donnée.*

Soit AB la somme de deux côtés adjacens; pour faire avec cette somme un rectangle égal à un carré donné, on élève KM perpendiculaire sur AB et égal au côté de ce carré, on tire par M la parallèle XY à AB, et de l'un des points de rencontre on abaisse XP perpendiculaire à AB; les segmens AP, PB sont les

côtés du rectangle. D'où il suit que le plus grand carré auquel puisse être égal le rectangle proposé, est celui pour lequel XY sera tangent au cercle ; ce carré est donc celui du rayon, et les deux côtés du rectangle sont les deux rayons AO, OB. Le rectangle maximum est donc le carré fait sur la moitié de la somme donnée.

77e Problème. (*fig.* 93). *Étant donnés deux points* A, B, *et un point quelconque* M *tel, que* $MA \pm MB = 2a$, *on tire* MN *parallèle à* AB, *et telle que* MN *soit à* MB *dans le rapport constant de* m *à* n. *On demande quel doit être ce rapport pour que les points* N *soient tous sur une même perpendiculaire à* AB.

1°. Désignons par c la moitié OB de AB, et par x la distance de O au pied de la perpendiculaire MX à AB. On aura

$$AM^2 - MB^2 = AX^2 - BX^2 = (AX + XB)(AX - XB) = 2c \times 2x;$$

$$\text{or } AM^2 - MB^2 = (AM + MB)(AM - MB) = 2a\,(AM - MB);$$

$$\text{donc} \qquad AM - MB = \frac{4cx}{2a} = \frac{2cx}{a}.$$

La différence de MB à la demi-somme a, devant être la moitié de la différence des deux parties, sera $\frac{cx}{a}$; de sorte que l'expression de MB sera $a - \frac{cx}{a}$. De plus, en tirant NP perpendiculaire à AB, on a $MN = OP - OX$; on aura donc

$$a - \frac{cx}{a} : OP - x :: m : n;$$

cette proportion donne

$$OP = \frac{na}{m} + \frac{1}{m}\left(m - \frac{nc}{a}\right)x.$$

Or, OP doit être indépendant de x; il faut donc que

$$\frac{nc}{a} = m;\ \text{d'où}\ m : n :: c : a, \text{et}\ OP = \frac{na}{m}.$$

Telle doit être la valeur du rapport de m à n pour que les points N soient sur une même perpendiculaire à AB. Le point P se déterminera par la relation

$$OP = \frac{na}{m} = \frac{a \times a}{c}.$$

2°. Si c'est la différence qui est constante, les mêmes constructions conduiront à des résultats analogues; le rapport cherché sera toujours celui de c à a, et la distance au milieu O sera encore $\frac{a \times a}{c}$. Mais comme a se trouve dans ce cas plus petit que c, le point P est entre A et B, tandis que dans le cas précédent il était en dehors.

Dans ces deux cas, la droite qui est le lieu des points N se nomme la *directrice* des points M. On en trouverait une symétrique par rapport au point A.

78e Problème. (*Fig.* 94). *Trouver un point tel, que les sommes ou les différences de ses distances à trois points donnés, pris deux à deux, soient égales à des quantités données.*

Soient A, B, C les trois points donnés, et M le point cherché; construisez les directrices DX et EY relatives à CB, AC, et abaissez sur elles les perpendiculaires MP, MQ. Le rapport de MC à MP sera connu, ainsi que celui de MQ à MC; on connaîtra donc celui de MP à MQ. Le point M sera donc sur une droite menée par le point O, et facile à construire. Le rapport de OM à MP sera donc connu; or celui de MP à MC l'est déjà; on connaîtra donc celui de OM à MC; et le point M sera par conséquent sur un cercle qu'on sait construire; ce point sera donc déterminé par l'intersection de ce cercle avec la ligne droite déjà construite.

79e Problème. (*Fig.* 95). *Étant donnés deux points* A, B, *et une droite* ST, *trouver un point tel, que les différences ou les sommes de ses distances aux points donnés et à la droite, prises deux à deux, soient égales à des lignes données.*

Tirez la directrice XY relative à AB.

1°. Si c'est la différence MP — MB qui est donnée, tirez UV parallèle à ST, à une distance égale à cette différence, vous aurez BM = MO, et le problème reviendra au précédent, puisqu'on connaît le rapport de MB à MK et à MO.

2°. Si c'est la somme MB + MP qui est donnée, vous tirerez U'V' parallèle à ST, à une distance égale à cette somme; alors MB sera égale à MP', et la construction sera la même.

80e Problème. (*fig.* 96). *Trouver un point connaissant les sommes ou les différences de ses distances à un point donné* A, *et à deux droites données.*

On trouvera, comme dans le cas précédent, deux droites XY, ZU, telles, que AM = MQ et AM = MR. Il ne s'agira plus que de faire passer par le point A un cercle tangent à ces deux droites.

81e Problème. *Connaissant les sommes ou les différences des distances d'un point à trois droites prises deux à deux, construire ce point.*

D'après le problème précédent, cela reviendra à construire un cercle tangent à trois droites qui se déduisent immédiatement des trois premières.

Nous allons, au moyen de ces constructions, donner de nouvelles solutions de quelques-uns des problèmes précédens sur le contact des cercles.

82e Problème. (*Fig.* 97). *Mener par un point donné* A *un cercle tangent à deux cercles, ou à une droite et à un cercle.*

1°. Soit M le centre du cercle cherché; les différences MC — MA, MB — MA, seront égales respectivement aux rayons des deux cercles donnés; ce qui revient à l'un des problèmes précédens (page 274).

2°. Soit XY (*fig.* 98) la ligne donnée, et M le centre du cercle cherché; on connaîtra dans ce cas les différences des distances de ce point à deux points et à une droite; ce qui se résoudra comme précédemment (page 274).

83e Problème. *Mener un cercle tangent à trois cercles, ou à une droite et deux cercles.*

1°. On connaîtra les différences des distances du centre M aux trois centres A, B, C.

2°. On connaîtra les différences des distances du centre M à deux points et à une droite.

Dans certaines positions de contact intérieur, on pourra avoir des sommes au lieu de différences; ce qui se ramènera aux problèmes précédens.

Nota. Réciproquement, on pourra résoudre les problèmes précédens (pages 274) sur les distances, par les constructions des contacts des cercles; et je pense qu'on y trouvera quelque avantage. J'ai cru néanmoins qu'il serait utile d'en donner des solutions plus directes. Voici ces solutions; elles auront l'avantage d'exercer utilement l'esprit des élèves.

Théorème. (*Fig.* 99). *Prouver que les trois centres de similitude de trois cercles pris deux à deux sont en ligne droite.*

Soient A, B, C les trois centres, et a, b, c les rayons correspondans; soient O, P deux des centres de similitude; je dis que si l'on prolonge BC jusqu'à la rencontre de OP en Q, ce point sera le centre de similitude des cercles B et C, c'est-à-dire qu'on aura la proportion QC : QB :: c : b.

En effet, $OB : OA :: b : a$ et $PC : PA :: c : a$;

d'où $$\frac{PC}{OB} : \frac{PA}{AO} :: \frac{c}{b} : 1.$$

Tirant BK parallèle à AP, on a

$$QC : QB :: CP : BK :: \frac{CP}{BO} : \frac{BK}{BO} :: \frac{CP}{BO} : \frac{AP}{AO}.$$

Donc, à cause du rapport commun, on aura aussi

$$QC : QB :: \frac{c}{b} : 1, \quad \text{ou} \quad QC : QB :: c : b;$$

ce qu'il fallait démontrer.

Le même théorème aurait lieu en prenant deux centres de similitude inverses, conjointement avec l'un des précédens.

84ᵉ PROBLÈME. *Inscrire dans un triangle donné un triangle minimum semblable à un triangle donné.*

Prenez un triangle quelconque semblable au second triangle, et circonscrivez-lui un triangle maximum semblable au premier triangle, par le moyen d'une construction donnée précédemment; vous aurez une figure semblable à la proposée, qui se construira alors en reportant des longueurs proportionnelles à leurs correspondantes.

85ᵉ PROBLÈME. (*Fig.* 100). *Trois cercles quelconques étant donnés, décrire un triangle maximum circonscrit à leur système et semblable à un triangle donné.*

Par les trois centres A, B, C des cercles donnés, faites passer un triangle XYZ maximum et semblable au triangle donné; puis menez des tangentes parallèles aux côtés du triangle XYZ; elles détermineront le triangle DEF demandé.

86ᵉ PROBLÈME. *Inscrire dans un triangle donné trois cercles dont les rayons et les distances des centres soient dans des rapports donnés, et dont le système soit un minimum.*

Construisez trois cercles qui aient entre eux les rapports demandés, et circonscrivez-leur comme précédemment le triangle maximum; vous aurez une figure semblable à celle que vous cherchez qui s'en déduira par des lignes proportionnelles.

87ᵉ PROBLÈME. *Déterminer le nombre des polygones réguliers de m côtés qu'on peut inscrire dans un cercle.*

Supposons la circonférence divisée en m parties égales, on aura un premier polygone en joignant consécutivement les points de division.

Soit maintenant n un nombre quelconque premier avec m; si l'on joint les sommets de n en n, on n'aura un nombre exact de fois la circonférence ou m subdivisions, qu'après avoir porté m cordes consécutives soutendant n subdivisions chacune; d'où il résultera un polygone régulier de m côtés de forme *étoilée*.

Si n avait un facteur commun α avec m, on aurait $m=\alpha m'$ $n=\alpha n'$; et portant n subdivisions à la fois, on aurait un nombre divisible par m après m' opérations. Le polygone n'aurait donc que m' côtés, et ceux de m côtés ne pourront s'obtenir qu'en prenant

pour n des nombres premiers avec m. Ces nombres peuvent être plus petits ou plus grands que m; mais quand on les porte sur la circonférence, on trouve les mêmes points que si l'on considérait le reste de leur division par m : il suffit donc de considérer les nombres moindres que m.

Pour connaître la somme des angles d'un pareil polygone, soit n un nombre premier avec m, et plus petit que $\frac{1}{2}m$; ce qui donnera le même polygone que $m-n$. L'angle de deux côtés consécutifs soutend un arc égal à $m-2n$ subdivisions qui mesurent chacune $\frac{4}{m}$ angles droits; multipliant donc $m-2n$ par $\frac{4}{m}$ et par le nombre m des angles, puis prenant la moitié, vu que les angles sont inscrits, on aura $2m-4n$.

Lorsque $n=1$, la somme est $2(m-2)$, ce qui donne le théorème connu pour les polygones ordinaires convexes.

Problèmes et Théorèmes à résoudre et à démontrer.

228. Problème. Trouver le lieu des points tels, que la somme des carrés de leurs distances aux côtés d'un polygone régulier soit donnée.

Problème. (*Fig.* 101). Etant données deux droites qui se coupent en O, et un point A, on mène des couples quelconques de sécantes telles que AX, AY; on joint XU, ZY; trouver le lieu du point M de leur intersection.

Problème. (*Fig.* 102). D'un point donné A, on mène à un cercle des sécantes quelconques AX, AY; on joint les quatre points X, Y, Z, U deux à deux; il faut déterminer le lieu des rencontres M et N.

Quand A est hors du cercle, le lieu demandé est la droite qui passe par les points de contact. Lorsque le point donné n'est pas extérieur, le lieu cherché est une droite qui ne coupe pas le cercle.

On en déduit les théorèmes suivans :

Théorème. (*Fig.* 103). Lorsque par un point quelconque M d'une droite donnée, on mène des tangentes à un cercle, la ligne XY qui joint les points de contact passe par un point constant.

Il en serait de même si, au lieu de mener des tangentes, on tirait des sécantes, et qu'on joignît leurs points deux à deux comme précédemment.

Théorème. (*Fig.* 104). Si l'on prolonge les côtés opposés d'un quadrilatère inscrit, ainsi que les tangentes menées par les sommets opposés, les quatre points de rencontre X, Y, Z, U seront en ligne droite.

Problème. Etant données quatre droites situées d'une manière quelconque dans un plan, mener une droite telle, que les trois parties interceptées entre les premières soient dans des rapports donnés.

Théorème. L'aire du dodécagone régulier inscrit est égale à trois fois le carré du rayon.

Théorème. Le carré du côté du pentagone inscrit est égal au carré du rayon, plus le carré du décagone.

Théorème. (*Fig.* 105). Si sur les trois côtés d'un triangle rectangle ABC on décrit trois demi-cercles, la somme des deux *lunulles*, BmCnB, ApBqA, comprises entre la demi-circonférence décrite sur l'hypoténuse et les deux autres circonférences, est égale à l'aire du triangle ABC.

Théorème. Si d'un point donné on mène à un cercle deux sécantes perpendiculaires entre elles, la somme des carrés des cordes sera constante.

Théorème. Si par les sommets d'un triangle, on mène des tangentes au cercle circonscrit, leurs points de rencontre avec les côtés opposés seront en ligne droite.

Problème. On inscrit un carré dans un autre, en partageant les côtés de celui-ci dans le rapport de m à n; on en inscrit un dans le second de la même manière, et on continue ainsi indéfiniment. On demande,

1°. Au bout de combien d'opérations la somme des carrés inscrits sera égale à une surface donnée ;

2°. La limite vers laquelle tend la somme indéfinie de ces carrés.

PROBLÈME. (*Fig.* 106). Etant donnés un angle et un point A, mener une sécante AXY telle, que $AX \times XY = m^2$.

PROBLÈME. Construire un triangle, connaissant l'angle au sommet, la somme et la différence des côtés qui le comprennent, et la somme ou la différence de la base et de la hauteur.

PROBLÈME. (*Fig.* 107). Etant donnés deux points A, A', et une droite BC, trouver sur cette droite deux points X, Y, tels, qu'en les joignant à A et A', les angles XAY, XA'Y, soient égaux à des angles donnés.

PROBLÈME. Construire un quadrilatère, connaissant les côtés et la surface, ou les côtés et l'angle des diagonales, ou les angles et les diagonales, ou enfin les angles; la surface et le périmètre.

PROBLÈME. Construire un triangle, connaissant la base, la hauteur et la différence des angles à la base.

PROBLÈME. Construire un triangle, connaissant l'angle au sommet, la hauteur et la ligne menée du sommet au milieu de la base.

PROBLÈME. (*Fig.* 108). Etant donnés quatre points A, B, C, D en ligne droite, mener par ces points quatre droites qui forment un quadrilatère XYZU donné d'*espèce*, c'est-à-dire semblable à un quadrilatère donné.

PROBLÈME. A un quadrilatère donné, inscrire ou circonscrire un quadrilatère donné d'espèce.

PROBLÈME. Inscrire dans un cercle donné un triangle dont deux côtés passent par des points donnés, et le troisième soit parallèle à une ligne donnée.

PROBLÈME. Inscrire dans un cercle un polygone d'un nombre donné de côtés, dont les uns passent par des points donnés et les autres soient parallèles à des lignes données.

PROBLÈME. (*Fig.* 109). Trouver le lieu des points desquels les parties AB, CD d'une droite donnée MN seront vues sous le même angle.

PROBLÈME. Trouver le lieu des points tels que la somme des carrés de leurs distances aux sommets d'un polygone régulier, soit constante, ou soit un minimum.

Problème. Etant donnés un point A et des droites faisant entre elles des angles égaux autour de ce point, trouver le lieu des points tels, qu'en abaissant sur elles des perpendiculaires, la somme des carrés des distances du point A à leurs pieds soit constante.

Problème. Deux droites quelconques étant données dans un plan, mener par un point donné du même plan une sécante telle, que les segmens qu'elle détermine sur les premières, et comptés à partir de deux points donnés sur ces lignes, soient dans un rapport donné.

Problème. Etant donné deux parallèles et deux points pris respectivement sur elles, mener par un point donné de leur plan une sécante telle, que le rectangle des segmens de ces parallèles comptés à partir des deux premiers points soit donné.

Problème. Résoudre la question précédente dans le cas où les deux droites, au lieu d'être parallèles, feraient entre elles un angle quelconque.

Problème. Partager une droite donnée en deux segmens tels, que le carré de l'un soit dans un rapport donné avec le produit de l'autre par une ligne donnée.

Problème. Etant donnés trois points sur une droite, en trouver un quatrième sur la même ligne, de telle sorte, que le carré de sa distance à l'un des trois premiers points soit dans un rapport donné avec le produit de ses distances aux deux autres points.

Problème. Etant donnés quatre points sur une droite, en trouver un cinquième sur la même ligne, de manière que le rectangle de ses distances à deux d'entre eux soit dans un rapport donné avec le rectangle de ses distances aux deux autres.

Problème. Par un point donné, mener une droite telle, que la partie interceptée entre deux circonférences concentriques soit égale à une quantité donnée.

Problème. Etant données deux circonférences dont l'une est intérieure à l'autre, mener par le point où la plus petite rencontre la ligne des centres, une droite telle, que la partie comprise entre les deux cercles soit donnée.

Problème. Etant donné un angle d'une grandeur constante dont le sommet est fixe et dont le rectangle des côtés est constant, trouver la ligne que décrit l'une des extrémités d'un des côtés de l'angle quand l'autre extrémité décrit un cercle donné.

Problème. Etant donnés deux points sur une droite, trouver le lieu des points tels, qu'en menant par ces points deux lignes parallèles à des droites fixes, le rapport des distances de leurs pieds aux deux points fixes soit constant.

Problème. Trouver le lieu des points tels, que le carré de leur distance à un point fixe, soit égal au rectangle fait sur une longueur donnée, et leur distance à une droite donnée.

Problème. Etant donnés deux points fixes, trouver le lieu des points tels, que le carré de leur distance au premier point, soit dans un rapport donné avec le carré de leur distance au second point augmenté ou diminué d'un carré donné.

Problème. Etant donnés des points en nombre quelconque sur un plan, en trouver un autre tel, qu'en y faisant passer une droite quelconque, la somme des perpendiculaires abaissées sur elle des points situés d'un même côté, soit égale à celle des perpendiculaires abaissées des autres points.

Problème. Etant donné le périmètre d'un polygone variable, trouver la valeur de ses côtés quand il devient maximum.

Problème. Tous les côtés d'un polygone moins un étant donnés, déterminer ce dernier de manière que le polygone soit maximum.

Problème. Etant donné les côtés d'un polygone, déterminer les conditions pour que son aire soit maximum.

Problème. Former le polygone maximum avec un périmètre donné.

Des Points, des Lignes et des Surfaces dans l'espace.

229. Tous les problèmes de Géométrie ont pour objet de découvrir des rapports, ou d'exécuter graphiquement des constructions demandées. Dans le premier cas, on peut, comme dans les théorèmes, supposer fait tout ce qui est démontré possible; dans le second cas, il faut avoir égard aux difficultés que présente l'imperfection des instrumens : ainsi, comme ils ne peuvent décrire les lignes que dans des plans résistans, on devra toujours supposer ces plans primitivement établis, sans quoi les constructions seraient impraticables. Mais comme ces plans matériels seraient impénétrables, cette supposition devient réellement impossible dans la pratique, et on a cherché à ramener le plus possible les problèmes graphiques à des constructions faites dans un seul plan. Cette réduction ne saurait avoir lieu que lorsque les choses demandées sont comprises, au moins séparément, dans un même plan. Par exemple, elle est possible, si l'on demande le rayon d'une sphère tangente à quatre sphères données, et impossible s'il s'agit de construire une pyramide sous des conditions quelconques.

Nous ne nous astreindrons pas, dans ce qui suit, à ramener tout à des constructions dans un plan unique; ce sera là l'objet d'une théorie particulière. Nous regarderons un plan comme déterminé par trois points non en ligne droite, et nous supposerons possible d'y exécuter toutes les constructions connues. Nous nous occuperons ensuite de réduire les constructions, autant que possible, à des constructions faites dans un seul plan, et de n'exécuter hors de ce plan que les choses qui par leur nature ne peuvent y être comprises.

Pour éviter de reporter ailleurs un grand nombre de propositions qui seront plus à leur place dans cette partie de la Géométrie, nous supposerons connues les formules élémentaires de la Trigonométrie.

1er PROBLÈME. *Etant donné un nombre quelconque de plans et deux points* A, B *pris sur deux d'entre eux, trouver le plus*

court chemin de l'un à l'autre point sans sortir des plans donnés (fig. 110).

Supposez que ces plans se rabattent sur l'un d'eux, à la suite les uns des autres; la ligne la plus courte tracée sur leur système de A en B se sera développée sans changer de grandeur, ainsi que toutes les autres que l'on aurait pu y tracer; elle sera donc encore la plus courte après le rabattement; elle sera donc la droite menée de A à B : d'où il suit que pour trouver les points où le plus court chemin coupe les intersections successives des différens plans, il suffit de construire sur un plan le système rabattu, de joindre les points A, B par une droite, et de reporter les points de rencontre que l'on obtiendra, sur le système proposé.

2ᵉ Problème. *Trouver le plus court chemin sur la surface d'un cylindre ou d'un cône quelconques.*

L'une et l'autre surface étant la limite de surfaces composées de plans dont les arêtes sont toutes parallèles ou passent par un même point, ce qui précède leur est applicable. Le plus court chemin sera donc la courbe qui se développera avec la surface suivant la droite qui joindra les deux points rabattus. Pour le cylindre, ce sera un arc d'*hélice*.

3ᵉ Problème. *Trouver la valeur de la projection d'une surface plane sur un plan donné, connaissant cette surface et l'angle des deux plans.*

Pour y parvenir, menez dans la surface des cordes indéfiniment rapprochées, perpendiculaires à l'intersection des deux plans; vous formerez ainsi une suite de rectangles inscrits; leur somme aura pour limite la surface donnée; et la somme de leurs projections aura pour limite la projection de la même surface. Or, chaque rectangle et sa projection ayant une base commune, le rapport de ces deux rectangles sera le même que celui de leurs hauteurs, c'est-à-dire le cosinus de l'angle des deux plans; la projection totale des rectangles est donc égale à leur somme multipliée par le cosinus de cet angle; et d'après le théorème des limites, la projection de la surface est égale à cette surface multipliée par ce même cosinus.

THÉORÈME. *La somme des carrés des cosinus des angles qu'une droite forme avec trois droites perpendiculaires entre elles est égale à l'unité.*

En effet, l'angle de deux droites qui ne se coupent pas étant celui que forment des parallèles à ces droites menées par un même point, on pourra supposer la droite menée par le point de rencontre des trois droites. Or, si l'on prend sur elle une longueur égale à l'unité, et qu'on forme un parallélépipède dont elle soit la diagonale, et dont les trois droites données fassent un des angles solides, les trois arêtes contiguës seront les cosinus des angles que fait avec elle la diagonale. Mais, dans un parallélépipède rectangle, la somme des carrés des trois arêtes est égale au carré de la diagonale; la somme des carrés des cosinus est donc égale à l'unité.

THÉORÈME. *La somme des carrés des cosinus des angles qu'un plan forme avec trois plans rectangulaires, est égale à l'unité*; car ces angles sont les mêmes que ceux que formerait la perpendiculaire à ce plan avec les perpendiculaires à chacun des trois autres.

THÉORÈME. *Le carré d'une surface plane est égale à la somme des carrés de ses projections sur trois plans rectangulaires*, car chaque projection est égale à la surface multipliée par le cosinus de l'angle de projection, et la somme des carrés de ces trois cosinus est égale à l'unité.

THÉORÈME. *Le carré d'une droite est égal à la somme des carrés de ses projections sur trois droites rectangulaires*, car chaque projection est égale à la droite multipliée par le cosinus de l'angle que cette droite fait avec sa projection.

4° PROBLÈME. *Étant donnés les angles que deux droites forment respectivement avec trois droites rectangulaires* AX, AY, AZ (*fig.* 111), *trouver l'angle* θ *que ces deux droites font entre elles.*

On tirera, par l'origine A, des parallèles AM, AM′ aux droites proposées; l'angle MAM′ sera égal à θ. Soient α, β, γ et α', β', γ' les angles que AM et AM′ forment respectivement avec les axes AX, AY, AZ; prenons deux points arbitraires M, M′,

sur les deux droites; nommons x, y, z et x', y', z' les distances de l'origine A aux pieds des perpendiculaires abaissées de M et M' sur les axes AX, AY, AZ. Nous aurons

$$\cos\theta = \frac{AM^2 + AM'^2 - MM'^2}{2AM \times AM'}.$$

Or, $AM^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $AM'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$;
$MM'^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$;

d'où $$\cos\theta = \frac{x' x'' + y' y'' + z' z''}{AM \times AM'}.$$

Or $\frac{x}{AM} = \cos\alpha$, $\frac{x'}{AM'} = \cos\alpha'$, $\frac{y}{AM} = \cos 6$,

$\frac{y'}{AM'} = \cos 6'$, $\frac{z}{AM'} = \cos\gamma$, $\frac{z'}{AM'} = \cos\gamma'$.

Donc

$$\cos\theta = \cos\alpha \cos\alpha' + \cos 6 \cos 6' + \cos\gamma \cos\gamma'.$$

Remarque. Si les deux droites étaient perpendiculaires l'une à l'autre, on aurait

$$\cos\alpha \cos\alpha' + \cos 6 \cos 6' + \cos\gamma \cos\gamma' = 0.$$

Corollaire. Ces formules conviennent au cas de deux plans; car leur angle est le même que celui de deux droites qui leur seraient respectivement perpendiculaires.

Corollaire. Soient deux systèmes de trois droites rectangulaires x, y, z et x', y', z'. Soient α, 6, γ les trois angles que fait x' avec les droites x, y, z; α', $6'$, γ' ceux que fait y' avec les mêmes droites, et α'', $6''$, γ'' ceux que fait z' avec ces droites. On aura

$$\cos^2\alpha + \cos^2 6 + \cos^2\gamma = 1, \quad \cos^2\alpha' + \cos^2 6' + \cos^2\gamma' = 1,$$
$$\cos^2\alpha'' + \cos^2 6'' + \cos^2\gamma'' = 1,$$
$$\cos\alpha \cos\alpha' + \cos 6 \cos 6' + \cos\gamma \cos\gamma' = 0,$$
$$\cos\alpha \cos\alpha'' + \cos 6 \cos 6'' + \cos\gamma \cos\gamma'' = 0,$$
$$\cos\alpha' \cos\alpha'' + \cos 6' \cos 6'' + \cos\gamma' \cos\gamma'' = 0.$$

Mais, en comparant semblablement les droites x, y, z au système x', y', z', il vient

$$\cos^2\alpha + \cos^2\alpha' + \cos^2\alpha'' = 1, \quad \cos^2 6 + \cos^2 6' + \cos^2 6'' = 1,$$
$$\cos^2\gamma + \cos^2\gamma' + \cos^2\gamma'' = 1,$$
$$\cos\alpha \cos 6 + \cos\alpha \cos\gamma + \cos 6 \cos\gamma = 0,$$
$$\cos\alpha' \cos 6' + \cos\alpha' \cos\gamma' + \cos 6' \cos\gamma' = 0,$$
$$\cos\alpha'' \cos 6'' + \cos\alpha'' \cos\gamma'' + \cos 6'' \cos\gamma'' = 0.$$

Ces deux systèmes d'équations doivent être identiques, puisqu'ils expriment chacun les conditions pour que les deux systèmes des trois droites sojent rectangulaires.

5° Problème. *Étant données les projections d'une surface plane sur trois plans rectangulaires, trouver sa projection sur un autre plan quelconque faisant avec les trois premiers les angles $\alpha, 6, \gamma$.*

Soit m la surface donnée, et a, b, c les trois angles qu'elle fait avec les plans donnés, ses projections seront respectivement

$$p = m\cos a, \quad p' = m\cos b, \quad p'' = m\cos c.$$

Si on les projette toutes les trois sur le nouveau plan, et qu'on ajoute les trois projections, on aura

$$m(\cos a \cos\alpha + \cos b \cos 6 + \cos c \cos\gamma),$$

ou $m\cos V$, en nommant V l'angle du plan de la surface avec celui sur lequel on la projette : ce sera donc la projection de la surface m sur le quatrième plan. La désignant par M, on aura alors la formule générale

$$M = p\cos\alpha + p'\cos 6 + p''\cos\gamma.$$

Corollaire. Soient $m, m', m'', \ldots$, des surfaces planes en nombre quelconque dont on connaît les projections sur trois plans rectangulaires, on aura encore leur projection sur un autre plan quelconque, en y projetant les trois premières et faisant leur somme.

Théorème. *La somme des carrés des projections d'un nombre*

quelconque de surfaces planes sur trois plans rectangulaires quelconques est constante.

En effet, soient A, A′, A″ les projections de ces surfaces sur un des systèmes rectangulaires, et B, B′, B″ les projections sur un autre système quelconque, on aura, par la proposition précédente, en appelant α, β, γ les angles que le plan de B forme avec ceux de A, A′, A″, et ainsi des autres,

$$B = A\cos\alpha + A'\cos\beta + A''\cos\gamma,$$
$$B' = A\cos\alpha' + A'\cos\beta' + A''\cos\gamma',$$
$$B'' = A\cos\alpha'' + A'\cos\beta'' + A''\cos\gamma''.$$

Ajoutant les carrés de ces équations, et réduisant d'après les relations connues, il vient

$$B^2 + B'^2 + B''^2 = A^2 + A'^2 + A''^2;$$

ce qui démontre le principe énoncé.

6e Problème. *Trouver le plan sur lequel la somme des projections de surfaces planes quelconques est un maximum.*

De l'équation précédente on tire

$$A = \sqrt{B^2 + B'^2 + B''^2 - A'^2 - A''^2}.$$

Cette valeur sera maximum quand on aura, $A' = 0$ et $A'' = 0$, car $B^2 + B'^2 + B''^2$ est constant. Mais alors les valeurs précédentes de B, B′, B″, deviennent

$$B = A\cos\alpha,\ B' = A\cos\alpha',\ B'' = A\cos\alpha''.$$

Donc, $\cos\alpha = \dfrac{B}{\sqrt{B^2 + B'^2 + B''^2}}$, $\cos\alpha' = \dfrac{B'}{\sqrt{B^2 + B'^2 + B''^2}}$,

$\cos\alpha'' = \dfrac{B''}{\sqrt{B^2 + B'^2 + B''^2}}$.

Ce qui fait connaître les angles que le plan de la plus grande projection fait avec les trois plans rectangulaires relatifs aux projections B, B′, B″. Sa direction seule se trouve déterminée; et en effet, sur tous les plans parallèles, les projections sont égales.

Théorème. *La somme des projections des aires, m, m′, m″, etc., est constante sur tous les plans qui font le même angle avec celui de la plus grande projection.*

En effet, soient q, q', q'', les angles que fait un plan quelconque avec les plans B, B′, B″; on aura, en désignant par C la projection sur ce plan;

$$C = B\cos q + B'\cos q' + B''\cos q''.$$

Or, $B = A\cos\alpha$, $B' = A\cos\alpha'$, $B'' = A\cos\alpha''$;

donc $C = A(\cos\alpha\cos q + \cos\alpha'\cos q' + \cos\alpha''\cos q'') = A\cos V$,

en désignant par V l'angle du plan C avec le plan de la plus grande projection. La projection C ne dépend donc que de l'angle V, et sa valeur en fonction de B, B′, B″, est

$$C = \cos V \times \sqrt{B^2 + B'^2 + B''^2}.$$

Il en résulte que cette projection sera nulle pour tout plan perpendiculaire à celui de la plus grande projection.

Remarque. Toutes les propositions précédentes s'appliquent immédiatement aux projections des lignes droites sur trois axes rectangulaires.

7° Problème. *Trouver le plus court chemin entre deux droites.*

Si l'on conçoit par ces droites deux plans parallèles et une perpendiculaire à ces plans se mouvant le long d'une des droites, elle tracera sur le plan de l'autre une parallèle à la première; et si on l'arrête au point où cette parallèle coupe la seconde droite, elle sera à la fois perpendiculaire sur les deux droites données, et en sera la plus courte distance; car la ligne qui en joindrait deux autres points quelconques serait plus grande que la perpendiculaire comprise entre les deux plans.

8° Problème. *Une droite se mouvant parallèlement à un plan donné, et s'appuyant sur deux droites fixes, on demande le lieu des points qui la diviseront pour chaque position dans le rapport constant de* m *à* n.

Soient les deux droites XY, ZU (*fig.* 112), et AV une parallèle

à XY menée par un point quelconque A de ZU. Soient MN, NP les intersections d'un plan quelconque parallèle au plan donné avec les deux plans XYAV, VAU, ces deux lignes seront de direction constante, et MP sera une quelconque des lignes en question. Soit K le point qui partage MP dans le rapport de m à n; menons KH parallèle à MN, la ligne PN sera aussi partagée dans le rapport de m à n; le lieu des points H est donc une droite passant par le sommet A, et les points K sont dans le plan mené par cette droite parallèlement à MN. Mais ils sont aussi dans un plan parallèle aux deux droites, puisque toutes les droites interceptées entre trois plans parallèles sont coupées dans le même rapport ; donc le lieu cherché est l'intersection de ces deux plans, et par suite ce lieu est une droite parallèle à un plan qui serait parallèle aux deux droites données.

Théorème. *Si l'on divise deux côtés opposés d'un quadrilatère gauche quelconque dans le rapport de* m *à* n, *et les deux autres dans le rapport de* p *à* q, *les deux droites qui joindront les points de division des côtés opposés, se couperont, et leurs segmens seront dans le rapport de ceux des côtés opposés.*

En effet, soit XY (*fig.* 113) la droite qui partage les côtés AC, BD dans le rapport de m à n, elle sera parallèle au plan parallèle aux côtés AB, CD. Or, les points qui divisent cette droite et les autres parallèles au même plan, comprises entre AC et BD, dans le rapport constant de p à q, doivent être en ligne droite; et comme les deux lignes AB, CD, sont dans le cas de ces parallèles, il s'ensuit que si on joint les deux points qui les divisent dans le rapport de p à q, la ligne ZU qu'on obtiendra coupera XY dans le même rapport de p à q. De plus, ZU sera partagée dans le même rapport que AC et BD, puisque les droites XY, AB et CD sont comprises dans trois plans parallèles. Le principe est donc démontré.

9ᵉ Problème. *Trouver le point d'intersection des droites qui joignent les milieux des arêtes opposées d'une pyramide triangulaire* SABC (*fig.* 114):

Joignez d'abord les milieux M, N de SC et AB, puis les milieux P, Q de SA et BC; d'après le théorème précédent, les

droites MN, PQ, se couperont dans leurs milieux respectifs. Si l'on joint ensuite les milieux R, S, de SB et AC, le quadrilatère gauche SBAC fait voir que RS et PQ se coupent aussi en leurs milieux; les trois droites passent donc par un même point O, où elles se coupent en deux parties égales.

Pour connaître la position de ce point dans la pyramide, on remarquera que sa distance à l'une quelconque des faces, à ABC par exemple, est le quart de la distance correspondante de S à ABC, car la distance de O à ABC est la moitié de celle du point R à ABC, et la distance de R à ABC est la moitié de celle de S à ABC.

On verra par la suite que le point O est le centre de gravité du volume de la pyramide.

10ᵉ Problème. (*Fig.* 115). *Dans une pyramide* SABC, *on fait une section quelconque* MNP *parallèle à la base, on joint les milieux*, m, n, p, *des côtés de cette section aux sommets opposés* A, C, B, *de la base* ACB; *les trois droites que l'on obtient se coupent en un même point dont on demande le lieu.*

Je dis d'abord que les trois droites mA, nC, pB se coupent en un même point. En effet, mn étant parallèle à AC, les droites mA, nC se coupent en un point O, où elles sont divisées dans le rapport de mn à AC. Mais de même pB et nC se coupent en un point qui les divise dans le rapport de pn à BC, qui à cause des triangles semblables est le même que celui de mn à AC; ces trois droites se coupent donc en un même point.

Soient K, H, L, les milieux de AB, BC, AC; la droite Am étant dans le plan ASH, coupera SV; semblablement nC et pB couperont SV; et comme les trois droites mA, nC, pB, passent par un même point O et ne sont pas dans un même plan, elles ne peuvent rencontrer une même droite qu'au point même où elles se coupent; donc le point O est sur la droite SV qui est par conséquent le lieu cherché.

On peut remarquer que le point O est à la fois dans les trois plans APN, BMN, CMP; ce qui fournit une autre manière d'énoncer le théorème.

11ᵉ Problème. *Trouver la diagonale et le volume d'un pa-*

rallélipipède, connaissant les trois arêtes contiguës et les angles α, β, γ, que ces arêtes forment entre elles.

Soient a, b, c, les longueurs des trois arêtes, la diagonale D sera donnée par la formule

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos\overline{ab} + 2bc\cos\overline{bc} + 2ac\cos\overline{ac}\ (*) ;$$

et le volume V aura pour valeur

$$2abc\sqrt{\sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\right)}.$$

Ces formules se trouvent dans la Géométrie de M. *Legendre*.

12ᵉ Problème. *Trouver tous les points de l'espace également éclairés par deux lumières.*

Si l'on fait passer un plan par les deux points lumineux, le lieu des points également éclairés dans ce plan sera, comme nous l'avons vu précédemment, un cercle ayant son centre sur la droite qui joint les deux premiers points. Faisant tourner le plan autour de cette droite, le cercle sera toujours également éclairé, et décrira ainsi une sphère qui sera le lieu cherché.

Nota. On peut de la même manière se proposer sur le plan et la sphère un grand nombre des problèmes traités précédemment sur la ligne droite et le cercle; on trouvera facilement les énoncés et les solutions de ces problèmes; nous nous dispenserons de les indiquer.

13ᵉ Problème. (*Fig.* 116). *Etant donnés* m *points* A, A′, A″, A‴, . . . , *en trouver un dont la distance à un plan quelconque soit* moyenne *entre les distances de tous les autres points au même plan, c'est-à-dire, soit égale à leur somme divisée par leur nombre.*

Prenons d'abord le milieu B de AA′; le double de sa distance à un plan quelconque S sera égal à la somme des distances de A et A′ au même plan; qu'on prenne ensuite BC égal au tiers de BA″, je dis que le triple de la distance de C à S sera égal à la somme de celles des points A, A′, A″; en effet, soient P, Q, R

(*) On désigne par cos $\overline{ab}$ le cosinus de l'angle formé par les arêtes a, b.

les pieds des perpendiculaires, et A″V parallèle à PR, on aura

$$3UQ = 2VP + A''R.$$

Ajoutant au premier membre 3CU, et au second 2BV, qui lui est égal, on aura

$$3CQ = 2BP + A''R.$$

Mais 2BP est égal à la somme des distances des points A et A à S; donc, 3 fois la distance du point C à S égale la somme des distances des points A, A′, A″ au même plan S.

On joindrait semblablement C avec un quatrième point A‴, et on prendrait CD égal au quart de CA‴; le point C serait tel que quatre fois sa distance à un plan quelconque serait égale à la somme des distances correspondantes des quatre premiers points au même plan; et ainsi de suite.

On parviendra donc toujours de cette manière à un point O tel que sa distance à un plan quelconque, sera la moyenne distance de tous les autres au même plan.

La loi précédente est facile à saisir. Nous allons faire voir qu'elle est générale. Soit N (*fig.* 116 *bis*), le point obtenu par les n premiers, et P le $(n+1)^{ième}$; on aura par la même construction, en prenant NK égale à la $(n+1)^{ième}$ partie de NP,

$$(n+1) \times RM = n \times NL + SQ.$$

Ajoutant au premier membre $(n+1)$ KR, et au second son égal PS, il vient

$$(n+1) \times KM = n \times NL + PQ;$$

ce qui démontre la loi énoncée.

Si l'on ne considère qu'un plan, tous les points du plan parallèle mené par le point O qu'on vient de déterminer, jouiront de la même propriété, ainsi que le plan qu'on mènerait en-dessous à la même distance. Mais si on considère tous les plans possibles, le point O sera le seul qui sera toujours à une distance moyenne entre toutes les autres; on le nomme *centre des moyennes distances*, et pour le déterminer il suffit de chercher sa distance

à trois plans non parallèles, en prenant les trois moyennes entre les sommes respectives des distances de tous les points à ces trois plans.

1er Corollaire. Si l'on désigne par x, x', x'', ..., $x^{(n-1)}$ les distances de n points à un plan donné P, et par x_1 celle du centre des moyennes distances au même plan, on aura

$$x+x'+x''+\ldots+x^{(n-1)}=nx_1.$$

Cette formule suppose que tous les points sont d'un même côté du plan P.

Si on élève ce plan d'une quantité quelconque a, ces distances deviendront

$$x-a,\ x'-a,\ \ldots,\ x^{(n-1)}-a,\ x_1-a,$$

en regardant comme négatives celles qui se trouveront dirigées en sens contraire. Or, il est évident qu'en vertu de l'équation précédente on a

$$(x-a)+(x'-a)+\ldots+x^{(n-1)}-a=n(x_1-a).$$

Ce qui fait voir que la distance du centre des moyennes distances à un plan quelconque est moyenne entre la somme algébrique des distances des différens points à ce plan, en regardant comme négatives celles qui sont dirigées en sens contraire.

Il suit encore de là que pour tout plan passant par le centre des moyennes distances, et pour ces plans seulement, la somme algébrique des distances est nulle.

2e Corollaire. Quand tous les points donnés sont dans un même plan M, le centre de leurs moyennes distances s'y trouve aussi; car si l'on considère un plan parallèle P, tous les points donnés en seront à la même distance, et cette distance même sera la moyenne; d'où il suit que le centre sera dans le plan M.

De plus les distances de ces points à des plans perpendiculaires à celui dans lequel ils se trouvent, étant les mêmes que leurs distances aux traces de ces plans sur ce dernier, il en résulte que le centre des moyennes distances à des plans quel-

conques sera celui des moyennes distances à toutes les droites menées dans le plan de ces points.

14ᵉ Problème. (*Fig.* 117). *Etant donné un nombre* m *de droites passant par un même point* S, *on demande le lieu des points* X *tels, qu'en abaissant sur elles des perpendiculaires, la somme des produits de leurs distances au point* S, *par des lignes données, soit égale à une surface donnée* K^2.

Soient prises sur les droites données à partir de S, des parties SA, SA′,..., égales aux lignes par lesquelles il faut multiplier les distances SP, SP′,..., du point S aux pieds P, P′,..., des perpendiculaires abaissées du point X sur les droites données. Si l'on tire AQ, A′Q′,..., perpendiculaires sur SX, les triangles semblables donneront

$$SP \times SA = SQ \times SX,\ SP' \times SA' = SQ' \times SX, \ldots$$

Faisant la somme de ces égalités, on aura

$$K^2 = SX \times (SQ + SQ' + \ldots).$$

Soit Z le centre des moyennes distances des points A, A′,...; la distance SV sera moyenne entre SQ, SQ′,..., puisque toutes ces lignes sont les distances des points Z, A, A′,.., au plan perpendiculaire à SX mené par S; on pourra donc écrire

$$K^2 = SX \times m \times SV.$$

Mais si l'on abaisse XC perpendiculaire sur la droite SZ, on aura

$$SX \times SV = SC \times SZ.$$

Substituant, il vient

$$K^2 = m \times SC \times SZ;$$

d'où il suit que SC est une quantité constante. Donc le lieu cherché est un plan perpendiculaire sur la droite qui joint S au centre des moyennes distances de A, A′,..., et à une distance $SC = \frac{K^2}{m \times SZ}$.

15ᵉ Problème. *Etant donné un nombre quelconque de plans*

passant par un même point, trouver le lieu des points tels, que la somme des produits de leurs distances à ces plans par des lignes données soit constante.

Si par le point de concours des plans donnés, on leur mène des droites respectivement perpendiculaires, et que du point cherché on abaisse des perpendiculaires sur ces droites, les distances des pieds de ces perpendiculaires à l'origine seront les mêmes que les distances de ce point aux plans donnés; on revient donc au problème précédent.

16° Problème. *Etant donnés l'apothème a et le rayon R de la base d'un cône droit, trouver l'angle γ du secteur qui en est le développement sur un plan.*

L'arc intercepté par le secteur sera égal à 2πR, puisqu'il sera le développement de la circonférence de la base; comparant à quatre angles droits l'angle opposé x, on aura, par la proportion connue des angles et des arcs divisés par les rayons,

$$x : 2\pi :: \frac{2\pi R}{a} : \frac{2\pi R}{R} :: R : a, \text{ d'où } x = \frac{2\pi R}{a}.$$

Théorème. (*Fig.* 118). *Lorsque trois sphères se coupent deux à deux, les plans des trois cercles d'intersection se coupent suivant une même droite perpendiculaire au plan des trois centres.*

Soient A, B, C, les centres; les plans des cercles d'intersection seront perpendiculaires sur le plan ABC, et passeront respectivement par les droites MN, RS, PQ; or nous avons prouvé (*pag.* 261) que ces droites se coupent en un même point; les trois plans se coupent donc suivant une même droite perpendiculaire au plan ABC et menée par ce point.

Théorème. *Quand trois droites rectangulaires coupent une sphère et passent par un point constant, la somme* S_a *des carrés des cordes comprises est constante.*

En effet, si l'on abaisse du centre de la sphère des perpendiculaires sur les trois cordes, la somme des carrés des moitiés de ces cordes sera égale à trois fois le carré du rayon R, moins la somme des carrés des trois perpendiculaires. Mais si l'on formait un parallélipipède rectangle avec les trois plans perpendiculaires

et le centre de la sphère comme sommet opposé, ces trois perpendiculaires seraient les diagonales des faces passant par le centre, et la somme de leurs carrés serait par conséquent égale à deux fois le carré de la distance D du point donné au centre. Le quart de la somme proposée S_2 sera donc égal à $3R^2 - 2D^2$; donc la somme sera

$$S_2 = 12R^2 - 8D^2.$$

THÉORÈME. (*Fig.* 119). *Soit* ABCDEFG *un polygone quelconque fermé, plan ou gauche; si par un point quelconque* O *de l'espace, on tire une droite arbitraire* X'X, *et des droites* OE, OD,...; *égales et parallèles aux côtés du polygone et dirigées dans le même sens que ces divers côtés quand on les parcourt consécutivement, la somme des projections des côtés qui tomberont sur le prolongement* OX', *sera égale à la somme de celles qui tomberont sur* OX; *ou en d'autres termes, la somme algébrique totale des projections sur* XX' *sera nulle, en regardant comme positives celles qui se trouveront à droite du point* O, *et comme négatives celles qui seront à gauche.*

En effet, concevons qu'on mène par deux sommets du polygone deux plans perpendiculaires à XX', et qui comprennent entre eux tous les autres sommets. Soient A et E ces deux sommets extrêmes; il pourra arriver de deux choses l'une. Ou, en parcourant de E vers A la partie EDCBA, on s'éloignera toujours du plan perpendiculaire à XX' mené par E, ou l'on s'en éloignera et on s'en rapprochera successivement. Examinons ces deux cas.

Dans le premier cas, les parallèles menées par O aux côtés de la partie EDCBA, auront toutes leurs projections sur OX'; et en supposant la partie AGFE dans le même cas, par rapport au plan mené par A, ses côtés se projetteront sur OX. Mais les deux sommes de projections sur OX et OX' sont les projections des parties EDCBA et AGFE, c'est-à-dire la distance même des deux plans perpendiculaires à XX'; d'où il suit que ces deux sommes sont égales.

Dans le second cas, soit ED (*fig.* 119 *bis*) un côté suivant lequel

on se rapprochera du plan mené par le sommet extrême G. Concevons par les extrémités de ED, des plans perpendiculaires à XX', et qui coupent le polygone en M et N; on aura trois lignes EM, ED, DN, dont deux EM, ED auront en O des projections égales et de sens contraire, et la troisième une projection égale et située sur OX'. Il en serait de même quel que fût le nombre impair des intersections du polygone par les plans menés par D et E, et on agirait de la même manière pour la partie ALKIHG; d'où il suit que les projections situées respectivement sur OX et OX' se composeront d'abord de la distance des deux plans extrêmes, plus les distances communes des plans intermédiaires, tels que ceux que l'on a menés par D et E. Donc enfin, dans tous les cas, ces deux sommes sont égales; et par conséquent, leur somme algébrique sera nulle dans le sens indiqué par l'énoncé.

1[er] Corollaire. Si l'on mène par O un plan perpendiculaire à XX', les projections des côtés OE, OF,..., seront les distances des extrémités E, F,..., à ce plan; et l'on voit, par le théorème précédent, que cette somme est nulle, quelle que soit la direction du plan, puisque la droite XX' est arbitraire.

2[e] Corollaire. Le point O sera le centre des moyennes distances des points E, D, C,..., car ce qui précède a lieu pour tous les plans passant par O; et la distance du point O à tous ces plans étant nulle, est égale à la moyenne distance de tous les points E, D, C,..., à ces divers plans; le point O est donc le centre des moyennes distances de ces points à tout plan de l'espace, puisqu'il suffit pour cela qu'il le soit relativement à trois plans qui se coupent en un même point.

3[e] Corollaire. On sait que la projection d'une droite sur une autre est égale à la longueur de la première multipliée par le cosinus de l'angle qu'elle fait avec la seconde. Si donc on désigne par a, b, c, d,..., les côtés d'un polygone quelconque et par α, β, γ, δ,..., les angles qu'ils font avec la direction OX d'une droite quelconque, on aura, en observant que les projections situées sur le prolongement OX' de OX correspondent à des cosinus négatifs,

$$a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma + d\cos\delta + \ldots = 0.$$

Théorème. *La somme des produits des faces d'un polyèdre convexe quelconque, par les cosinus des angles qu'elles font avec un même plan est nulle, en prenant toujours pour ces angles ceux qui comprennent entre leurs faces le polyèdre donné.*

En effet, si l'on conçoit une perpendiculaire au plan de projection, qui se meuve en touchant continuellement la surface du polyèdre, elle la partagera en deux surfaces qui donneront chacune pour projection la partie du plan limitée par le polygone décrit par le pied de la perpendiculaire mobile. On observera de plus que les angles des faces avec le plan de projection, pris comme l'indique l'énoncé, sont tous aigus pour la partie supérieure, et obtus pour la partie inférieure; et comme la projection d'une aire plane est égale à cette aire multipliée par le cosinus de l'angle des deux plans, il suit de tout cela que la somme des produits des faces du polyèdre par les cosinus des angles qu'elles font avec un même plan, est égale à zéro.

Les élèves pourront chercher les modifications que subit ce théorème dans le cas d'un polyèdre à angles rentrans.

Théorème. *Dans tout polygone convexe, le carré d'un des côtés est égal à la somme des carrés de tous les autres, moins deux fois la somme de leurs produits deux à deux, multipliés par le cosinus de l'angle compris.*

En effet, un côté quelconque d'un polygone est égal à la somme des projections de tous les autres côtés sur le premier, en prenant négativement celles des côtés qui feront des angles obtus avec la ligne des projections, pourvu que l'on considère toujours les angles qui comprennent le polygone entre leurs côtés. On aura donc les diverses équations suivantes, en désignant généralement par (mn) l'angle que les côtés m et n font entre eux,

$$a = b\cos(ab) + c\cos(ac) + d\cos(ad) + e\cos(ae) + \dots$$
$$b = a\cos(ba) + c\cos(bc) + d\cos(bd) + e\cos(be) + \dots$$
$$c = a\cos(ca) + b\cos(cb) + d\cos(cd) + e\cos(ce) + \dots$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

Multipliant la première par a, la seconde par b, la troisième

par c, et ainsi de suite, il vient, en retranchant de la première équation la somme de toutes les autres, et faisant les réductions,

$$a^2 - b^2 - c^2 - d^2 - \ldots = -2bc\cos(bc) - 2bd\cos(bd)$$
$$- 2be\cos(be) - \ldots - 2cd\cos(cd) - 2ce\cos(ce) - \ldots$$

D'où résulte

$$a^2 = b^2 + c^2 + d^2 + \ldots - 2bc\cos(bc) - 2bd\cos(bd) - \ldots$$
$$- 2cd\cos(cd) - 2ce\cos(ce) - \ldots$$

Corollaire. On peut calculer par là le dernier côté d'un polygone, et ses deux angles adjacens, quand on connaît tous les autres côtés, ainsi que leur arrangement et leurs angles; on déterminera le côté inconnu, au moyen de la formule précédente, et chacun des angles adjacens se déterminera en prenant les formules analogues pour les deux côtés adjacens; chacune de ces équations déterminera le cosinus de l'un des angles.

Théorème. *Le carré d'une des faces d'un polyèdre convexe est égal à la somme des carrés des autres faces, moins la somme de leurs produits deux à deux multipliés par le cosinus de l'angle compris;* car une face quelconque est égale à la somme des projections de toutes les autres, en les prenant négativement, quand l'angle dièdre que font ces faces avec celle de projection est obtus : on en déduira donc, par le même calcul que dans le cas précédent (en désignant les faces par A, B, C, D, etc.), que

$$A^2 = B^2 + C^2 + D^2 + \ldots - 2BC\cos(BC) - 2BD\cos(BD) - \ldots$$

Théorème. (*Fig.* 120). *Dans un triangle quelconque* ABC *si on tire une sécante arbitraire* DE, *toute ligne* AH, *menée par le sommet, jouira de la propriété que le rapport de* $\frac{\overline{AF}^2}{DF \times FE}$ *à* $\frac{\overline{AH}^2}{BH \times HC}$ *sera constant.*

En effet, on a

$$\frac{AF}{DF}=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \quad \text{et} \quad \frac{AF}{FE}=\frac{\sin\alpha'}{\sin\delta}; \quad \text{d'où}$$

$$\frac{\overline{AF}^2}{DF\times FE}=\frac{\sin\alpha\sin\alpha'}{\sin\gamma\sin\delta}.$$

On a de même
$$\frac{\overline{AH}^2}{BH\times HC}=\frac{\sin\beta\sin\beta'}{\sin\gamma\sin\delta}.$$

Donc
$$\frac{\overline{AF}^2}{DF\times FE} : \frac{\overline{AH}^2}{BH\times HC} :: \sin\alpha\sin\alpha' : \sin\beta\sin\beta'.$$

Ce rapport est constant, puisque les droites BC, DE étant fixes, les angles α, α', β, β' sont invariables. Le principe est donc démontré.

Corollaire. Si l'on avait $\alpha'=\beta$, il en résulterait $\alpha=\beta'$, et ce rapport deviendrait l'unité.

On peut d'ailleurs le démontrer directement, en remarquant qu'on a, par les triangles semblables,

$$\frac{AF}{FD}=\frac{AH}{HC} \text{ et } \frac{AF}{FE}=\frac{AH}{HB};$$

d'où il résulte, en multipliant ces quantités par ordre,

$$\frac{\overline{AF}^2}{FD\times FE}=\frac{\overline{AH}^2}{HC\times HB}.$$

Théorème. (*Fig.* 121). *Soit* AB *un diamètre quelconque d'une sphère*, OC *un rayon perpendiculaire sur le plan d'un petit cercle de la sphère, et* DE *l'intersection du plan de ce cercle avec le plan qui passe par* AB *et* OC. *Si l'on suppose une surface conique dont* A *soit le sommet, et qui ait pour base le petit cercle* DE, *tout plan perpendiculaire à* AB *coupera ce cône suivant un cercle.*

En effet, soient AD, AE, les intersections du cône, par le plan AOC, et QR la trace sur ce même plan d'un autre plan quelconque perpendiculaire à AB. Menons une génératrice quel-

conque du point A au point K de la base; par cette ligne abaissons un plan perpendiculaire sur le plan AOC, ses intersections KL, IH, avec le plan de la base et le plan QR, seront perpendiculaires sur le plan AOC, et par suite parallèles entre elles; sa trace sur AOK sera AHL.

Cela posé, l'angle ANQ est égal à ADE, comme ayant même mesure; donc, d'après le corollaire précédent,

$$\frac{\overline{AH}^2}{PH \times HN} = \frac{\overline{AL}^2}{DL \times LE}. \quad \text{Or, } IH : KL :: AH : AL.$$

Substituant donc au rapport de $\overline{AH}^2$ à $\overline{AL}^2$, celui de $\overline{IH}^2$ à $\overline{KL}^2$, l'égalité précédente deviendra

$$\frac{\overline{IH}^2}{PH \times HN} = \frac{\overline{KL}^2}{DL \times LE}.$$

Mais, d'après une propriété connue du cercle, on a

$$\overline{KL}^2 = DL \times LE. \quad \text{Donc, } \overline{IH}^2 = PH \times HN.$$

Par conséquent, le lieu des points I, c'est-à-dire la section du cône par le plan QR, sera un cercle.

On démontrerait par une simple proportion que toute section faite dans le cône parallèlement à la base est un cercle, et généralement que *toutes les sections parallèles à un plan quelconque sont semblables*.

On a nommé *sections anti-parallèles* celles qui sont également inclinées sur les arêtes respectives AD, AE; tel est le cas des deux cercles que nous avons considérés. On peut remarquer que, de quelque manière que soient placées deux sections anti-parallèles, elles seront semblables, de même que les sections parallèles.

EXERCICES

SUR

L'APPLICATION DE L'ALGÈBRE A LA GÉOMÉTRIE.

Problèmes déterminés.

230. 1er Problème. *Décomposer en facteurs linéaires la différence des puissances* $m^{\text{ièmes}}$ *de deux lignes données.*

Prenons l'une de ces lignes pour unité, et représentons l'autre par x, la différence de leurs puissances $m^{\text{ièmes}}$ sera $x^m - 1$. Nous aurons la formule des facteurs de ce binome en résolvant l'équation $x^m - 1 = 0$.

Or, on sait qu'il suffit pour cela de poser

$$\cos y \pm \sqrt{-1} \sin y = 1, \text{ parce que l'on aura}$$

$$x = \sqrt[m]{1} = \cos \frac{y}{m} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{y}{m};$$

y sera déterminé par les deux conditions $\sin y = 0$, $\cos y = 1$; ce qui donne $y = 2n\pi$, n étant un nombre entier quelconque. Il résultera de là

$$x = \cos \frac{2n\pi}{m} \pm \sqrt{-1} \sin \frac{2n\pi}{m}.$$

Pour en déduire les m valeurs de x, il suffira, quand m sera pair, de faire passer n par les valeurs $0, 1, 2, \ldots, \frac{1}{2}m - 1$, et quand m sera impair, de donner à n les valeurs $0, 1, 2, \ldots, \frac{1}{2}(m-1)$; car on fait voir facilement que les m valeurs correspondantes

de x seront différentes les unes des autres, et que celles que donneraient les valeurs suivantes de n rentreraient indéfiniment dans les premières.

On parviendrait encore au même résultat en faisant passer n par les m valeurs, $0, 1, 2, \ldots, m-1$, et ne prenant que le signe supérieur de $\sqrt{-1}$.

Il suit de là que quand m sera pair, le binome $x^m - 1$ sera le produit des facteurs

$$x-1,\ x-\cos\frac{2\pi}{m}-\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{m},$$
$$x-\cos\frac{2\pi}{m}+\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{m},\ \ldots,$$
$$x-\cos\frac{2\pi}{m}\left(\tfrac{1}{2}m-1\right)-\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{m}\left(\tfrac{1}{2}m-1\right),$$
$$x-\cos\frac{2\pi}{m}\left(\tfrac{1}{2}m-1\right)+\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{m}\left(\tfrac{1}{2}m-1\right),\ x+1.$$

Lorsque m sera impair, $x^m - 1$ sera le produit des facteurs

$$(x-1),\ \left(x-\cos\frac{2\pi}{m}-\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{m}\right),$$
$$\left(x-\cos\frac{2\pi}{m}+\sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{m}\right),\ \ldots,$$
$$\left[x-\cos\frac{\pi(m-1)}{m}-\sqrt{-1}\sin\frac{\pi(m-1)}{m}\right],$$
$$\left[x-\cos\frac{\pi(m-1)}{m}+\sqrt{-1}\sin\frac{\pi(m-1)}{m}\right].$$

Pour construire géométriquement ce produit au moyen de facteurs linéaires, on remarquera que le produit de deux *facteurs conjugués* qui ne diffèrent que par le signe de $\sqrt{-1}$ est réel, parce que le produit de $x-\cos a-\sqrt{-1}\sin a$ par $x-\cos a+\sqrt{-1}\sin a$ est identiquement égal à........ $(x-\cos a)^2+\sin^2 a$.

D'après cela, l'on aura pour m pair;

$$x^m - 1 = (x-1)(x+1)\left[\left(x-\cos\frac{2\pi}{m}\right)^2 + \sin^2\frac{2\pi}{m}\right]\ldots$$
$$\left\{\left[x-\cos\frac{2\pi\left(\frac{m}{2}-1\right)}{m}\right]^2 + \sin^2\frac{2\pi\left(\frac{m}{2}-1\right)}{m}\right\},$$

et pour m impair,

$$x^m - 1 = (x-1)\left[\left(x-\cos\frac{2\pi}{m}\right)^2 + \sin^2\frac{2\pi}{m}\right]\ldots$$
$$\left\{\left[x-\cos\frac{\pi(m-1)}{m}\right]^2 + \sin^2\frac{\pi(m-1)}{m}\right\}.$$

Or, si l'on décrit du centre O (*fig.* 122) un cercle ayant pour rayon l'unité, que l'on prenne une distance $OA = x$, et que l'on partage la circonférence en m parties égales à partir de B, les perpendiculaires MP, NQ, ..., seront les sinus des arcs $\frac{2\pi}{m}$, $\frac{4\pi}{m}$, ..., et les distances OP, OQ, ..., seront leurs cosinus. On aura donc

$$\left(x-\cos\frac{2\pi}{m}\right)^2 + \sin^2\frac{2\pi}{m} = \overline{AP}^2 + \overline{MP}^2 = \overline{AM}^2 = AM \times AM',$$

$$\left(x-\cos\frac{4\pi}{m}\right)^2 + \sin^2\frac{4\pi}{m} = \overline{AN}^2 = AN \times AN'; \text{ etc.}$$

Dans le cas de m pair, le facteur $x+1$ donnera AC; et dans l'un et l'autre cas, la différence $x^m - 1$ sera le produit des distances du point A aux m points de division de la circonférence.

2e Problème. *Décomposer en facteurs linéaires, la somme des puissances* m*ièmes de deux lignes données.*

Prenant encore l'une des lignes pour unité, et désignant l'autre par x, il faudra chercher d'abord les racines de l'équation

$$x^m + 1 = 0, \text{ qui donne } x = \sqrt[m]{-1}.$$

faisant $\cos y \pm \sqrt{-1}\sin y = -1$, on en tire

$$y = (2n+1)\pi \text{ et } x = \cos\frac{(2n+1)\pi}{m} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{(2n+1)\pi}{m}.$$

Quand m est impair, on donne à n les valeurs successives, $0, 1, 2, \ldots, \frac{1}{2}(m-1)$; et l'on déduit de cette formule les m valeurs de x. Il en résulte que x^m+1 est le produit des facteurs

$$\left(x - \cos\frac{\pi}{m} - \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{m}\right),$$
$$\left(x - \cos\frac{\pi}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{m}\right), \ldots, (x+1).$$

Quand m est pair, il faut donner à n les valeurs $0, 1, 2, \ldots, \frac{1}{2}m-1$, et l'on trouve que x^m+1 est le produit des facteurs.

$$\left(x - \cos\frac{\pi}{m} - \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{m}\right), \left(x - \cos\frac{\pi}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{\pi}{m}\right), \ldots,$$
$$x - \cos\frac{(m-1)\pi}{m} - \sqrt{-1}\sin\frac{(m-1)\pi}{m},\ x - \cos\frac{(m-1)\pi}{m} + \sqrt{-1}\sin\frac{(m-1)\pi}{m}.$$

On construira les facteurs réels du second degré, comme dans le problème précédent, avec cette seule différence que les divisions de la circonférence en m parties égales ne commenceront pas au point B, mais au point qui en serait distant de l'arc $\frac{\pi}{m}$.

Théorème. *Si une circonférence est divisée en* m *parties égales, et qu'on prenne l'origine des arcs en un point quelconque, la somme des sinus des* m *arcs terminés à ces points de divisions sera nulle, ainsi que la somme de leurs cosinus.*

Cette propriété est une conséquence immédiate de ce que le centre du cercle est le centre des moyennes distances des m points de division, et que par conséquent la somme des distances de ces points à tout diamètre est nulle. Mais on peut la déduire de la considération des racines de l'équation binome $x^m - 1 = 0$, ainsi que plusieurs autres propriétés remarquables.

On observera pour cela que dans cette équation les termes en x manquant depuis x^m, la somme des racines est nulle ainsi que celle de leurs produits deux à deux, trois à trois, ..., $m-1$ à $m-1$; et par conséquent il en est de même de la somme de leurs carrés, de leurs cubes, ..., jusqu'à leurs puissances $(m-1)^{ièmes}$ inclusivement.

Or les m racines de l'équation $x^m - 1 = 0$ se tirent de la formule

$$x = \cos\frac{2n\pi}{m} + \sqrt{-1}\,\sin\frac{2n\pi}{m},$$

en donnant à n les valeurs successives, 0, 1, 2, ..., $m-1$; faisant la somme de toutes ces racines, et égalant séparément à zéro la partie réelle et la partie imaginaire, on aura

$$\cos 0 + \cos\frac{2\pi}{m} + \cos\frac{4\pi}{m} + \cos\frac{6\pi}{m} + \ldots + \cos\frac{(m-1)\pi}{m} = 0,$$

$$\sin 0 + \sin\frac{2\pi}{m} + \sin\frac{4\pi}{m} + \sin\frac{6\pi}{m} + \ldots + \sin\frac{(m-1)\pi}{m} = 0.$$

Jusqu'ici la propriété n'est démontrée que pour le cas où l'origine des arcs est l'un des points de division; mais on l'étendra facilement à une origine quelconque, en remarquant que si l'on multiplie toutes les valeurs de x par $\cos a + \sqrt{-1}\sin a$, leur somme n'en sera pas moins nulle, et tous les arcs se trouveront augmentés de a; ce qui conduit aux formules générales :

$$\cos a + \cos\left(a+\frac{2\pi}{m}\right) + \cos\left(a+\frac{4\pi}{m}\right) + \ldots + \cos\left(a+\frac{(m-1)\pi}{m}\right) = 0,$$

$$\sin a + \sin\left(a+\frac{2\pi}{m}\right) + \sin\left(a+\frac{4\pi}{m}\right) + \ldots + \sin\left(a+\frac{(m-1)\pi}{m}\right) = 0.$$

Théorème. *Si l'on partage une circonférence en* m *parties égales, la somme des carrés des cosinus des arcs terminés à ces* m *points de divisions, sera égale au carré du rayon multiplié par* $\frac{1}{2}$m, *et il en sera de même de la somme des carrés des sinus de ces arcs.*

20..

En effet, d'après ce que nous avons vu dans le théorème précédent, la somme des carrés des racines de l'équation $x^m - 1 = 0$ est nulle, et le sera encore quand on les multipliera par une expression quelconque de la forme $\cos a + \sqrt{-1} \sin a$; ce qui ne fait qu'augmenter les arcs de a.

Or, le carré de

$$\cos\left(a + \frac{2n\pi}{m}\right) + \sqrt{-1} \sin\left(a + \frac{2n\pi}{m}\right),$$

se réduit à

$$\cos^2\left(a + \frac{2n\pi}{m}\right) - \sin^2\left(a + \frac{2n\pi}{m}\right) + \sqrt{-1} \sin\left(2a + \frac{4n\pi}{m}\right).$$

Maintenant, si l'on fait la somme des m valeurs que détermine cette formule générale, et que l'on observe que la somme des troisièmes termes est nulle, d'après le théorème précédent, il s'ensuivra d'abord que la somme des carrés des cosinus des arcs en question, est égale à la somme des carrés de leurs sinus. Or, la somme des carrés du sinus et du cosinus d'un même arc, est égale au carré du rayon ou à l'unité, en prenant ce rayon pour unité; la somme des carrés des sinus et des cosinus des m arcs, est donc égale à m; par conséquent chacune de ces deux sommes est égale à $\frac{1}{2} \cdot m$.

3° Problème. *Calculer le rayon d'un cercle tangent à trois droites données.*

Si nous supposons que les trois droites se coupent deux à deux, il y aura quatre solutions. Considérons d'abord le cercle O inscrit dans le triangle ABC (*fig.* 123), formé par la rencontre de ces droites; désignons par a, b, c, ses trois côtés, par S sa surface et par R le rayon du cercle inscrit; on aura

$$S = AOC + BOC + BOA = \frac{1}{2} bR + \frac{1}{2} aR + \frac{1}{2} cR;$$

d'où $$R=\frac{2S}{a+b+c}=\frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{2p}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

Semblablement, on aura pour le centre O′,

$$S=AO'C+BO'A-BO'C=\frac{1}{2}bR'+\frac{1}{2}cR'-\frac{1}{2}aR';$$

d'où $$R'=\frac{2S}{b+c-a}=\sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}}.$$

On aura de même pour les deux autres cercles O″, O‴,

$$R''=\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)}{p-c}},\quad \text{et}\quad R'''=\sqrt{\frac{p(p-a)(p-c)}{p-b}}.$$

1er Corollaire. Si l'on multiplie entre elles les valeurs de ces quatre rayons, on trouvera

$$RR'R''R'''=p(p-a)(p-b)(p-c)=S^2.$$

Le produit des quatre rayons des cercles tangens à trois droites qui se coupent deux à deux, est donc égal au carré de la surface du triangle déterminé par ces trois droites.

2e Corollaire. Si l'on suppose que les deux points B, C, restant fixes, ainsi que la direction BA, le point A s'éloigne indéfiniment, les deux droites BA, CA, tendront à devenir parallèles; cherchons ce que devient la formule qui donne le rayon R, quand CA devient parallèle à BA. Menant la perpendiculaire CD à AB et faisant $CD=h$, $BD=\alpha$; les quantités a, h, α, B seront constantes. Les variables b, c, s'approcheront de l'infini, mais leur rapport aura l'unité pour limite, car

$$b^2=h^2+(c-\alpha)^2,\quad \frac{b^2}{c^2}=1+\frac{\alpha^2+h^2}{c^2}-\frac{2\alpha}{c}.$$

Or,

$$R=\frac{2S}{a+b+c}=\frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}{2(a+b+c)}=\frac{\sqrt{[b^2-(a-c)^2][(a+c)^2-b^2]}}{2(a+b+c)}.$$

Remplaçant b^2 par sa valeur $h^2+c^2-2c\alpha+\alpha^2$, il vient

$$R=\frac{\sqrt{(h^2-a^2+\alpha^2-2c\alpha+2ac)(a^2-h^2-\alpha^2+2ac+2c\alpha)}}{2(a+b+c)}.$$

Divisant chacun des facteurs sous le radical par c, ainsi que le dénominateur, puis faisant c infini, et observant que $\frac{b}{c}$ se réduit à 1, on trouve

$$R=\tfrac{1}{4}\sqrt{(2a-2\alpha)(2a+2\alpha)}=\tfrac{1}{2}\sqrt{a^2-\alpha^2}.$$

Ce qui donne pour R la moitié de la perpendiculaire AD; comme on pouvait le prévoir.

4ᵉ Problème. (*Fig.* 124). *Trouver l'expression du rayon du cercle circonscrit à un triangle* ABC, *dont les côtés* a, b, c *sont donnés.*

Soit R le rayon du cercle circonscrit O. Abaissons la perpendiculaire BD à AC, tirons le diamètre BE et joignons EC; les triangles semblables BAD, CBE donneront

$$BD : c :: a : 2R;\quad \text{d'où}\quad R=\frac{abc}{2b\times BD}.$$

Or $b\times$BD est le double de l'aire du triangle ABC; donc

$$R=\frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

5ᵉ Problème. (*Fig.* 125). *Trouver les deux diagonales d'un quadrilatère inscrit* ABCD, *en fonction de ses côtés* a, b, c, d.

Désignons par x et y les diagonales BC, AD; les deux angles B et C étant supplémens l'un de l'autre, leurs cosinus sont égaux et de signes contraires; on a donc

$$\frac{a^2+b^2-y^2}{2ab}=-\left(\frac{c^2+d^2-y^2}{2cd}\right);\ \text{d'où}$$

$$y^2(ab+cd)=cd(a^2+b^2)+ab(c^2+d^2)=(cb+da)(ca+bd),$$

et par suite $\quad y=\sqrt{\frac{(cb+da)(ca+bd)}{ab+cd}}.$

Les cosinus des angles A et D donneraient semblablement

$$x=\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)}{ad+bc}}.$$

1er Corollaire. En multipliant entre elles ces valeurs de x et y, on trouve

$$xy=ac+bd.$$

Ce qui fait voir que *le rectangle des diagonales d'un quadrilatère inscrit est égal à la somme des rectangles des côtés opposés.*

2e Corollaire. En divisant l'une par l'autre les deux mêmes expressions, on obtiendra

$$\frac{x}{y}=\frac{ab+cd}{ad+bc};$$

d'où il résulte que *les deux diagonales d'un quadrilatère inscrit sont entre elles comme les sommes des rectangles des côtés qui partent des extrémités de chacune d'elles.*

6e Problème. *Étant donnés la surface et le périmètre d'un triangle rectangle, trouver ses trois côtés.*

Soient a son périmètre, m^2 sa surface, x l'hypoténuse, et y, z, les deux autres côtés. On aura

$$x+y+z=a,\quad yz=2m^2,\quad y^2+z^2=x^2.$$

La première équation donne

$$(y+z)^2=(a-x)^2, \text{d'où } y^2+z^2=(a-x)^2-2yz=(a-x)^2-4m^2.$$

On aura donc, en vertu de la troisième équation,

$$x^2=(a-x)^2-4m^2;\quad \text{d'où}\quad x=\frac{1}{2}a-\frac{2m^2}{a}.$$

Pour trouver y et z, on remarquera qu'on connaît leur somme $a-x=\frac{a}{2}+\frac{2m^2}{a}$, et leur produit $2m^2$; y et z sont donc racines de l'équation $t^2-\left(\frac{a}{2}+\frac{2m^2}{a}\right)t+2m^2=0$;

et par conséquent leurs valeurs sont

$$\frac{a}{4}+\frac{m^2}{a}\pm\sqrt{\frac{a^2}{16}+\frac{m^4}{a^2}-\frac{3m^2}{2}}.$$

7ᵉ Problème. *Étant donnés le périmètre et la hauteur d'un triangle rectangle, calculer ses côtés.*

Soient, x l'hypoténuse, y et z les deux autres côtés, h la hauteur donnée et a le périmètre. On aura

$$x+y+z=a,\quad hx=yz,\quad x^2=y^2+z^2.$$

De la première équation on tire

$y+z=(a-x)$; d'où $y^2+z^2=(a-x)^2-2yz=(a-x)^2-2hx$;

et en vertu de la troisième il vient

$$(a-x)^2-2hx=x^2;\quad \text{d'où}\quad x=\frac{a^2}{2(a+h)}.$$

Connaissant x, on en déduira facilement y et z, puisque leur somme est $a-x$ et leur produit hx.

8ᵉ Problème. *Étant donnée l'hypoténuse* b *d'un triangle rectangle, ainsi que la somme* a *des deux autres côtés* x, y, *et de la hauteur* z, *trouver les inconnues* x, y, z.

Les équations qui détermineront les inconnues x, y, z, sont

$$x+y+z=a,\quad bz=xy,\quad x^2+y^2=b^2.$$

La première équation donne

$$(x+y)^2=(a-z)^2;\quad \text{d'où}\quad x^2+y^2=(a-z)^2-2bz,$$

et d'après la troisième équation, il vient

$$(a-z)^2-2bz=b^2;\quad \text{d'où}\quad z=a+b\pm\sqrt{2ab+2b^2}.$$

Il est évident qu'il ne faut prendre que le signe inférieur du radical, puisque la hauteur z est nécessairement plus petite que $a+b$.

Connaissant z, on déterminera x et y dont on connaîtra la

somme $a-z$ et le produit bz; de sorte que x et y seront racines de l'équation

$$t^2+(b-\sqrt{2ab+2b^2})\,t+b^2+ab-b\sqrt{2ab+2b^2}=0.$$

Si l'on avait cherché l'équation finale en x, le calcul aurait été beaucoup plus compliqué. On aurait tiré des deux premières

$$y=\frac{b(a-x)}{b+x},$$

et reportant dans la troisième, on aurait obtenu l'équation

$$x^4+2bx^3+b^2x^2-2b^2(a+b)x+b^2(a^2-b^2)=0.$$

Son premier membre se décompose en deux facteurs du second degré, qui, égalés à zéro, donnent

$$(1)\ldots x^2+(b+\sqrt{2ab+2b^2})x+b^2+ab+b\sqrt{2ab+2b^2}=0,$$
$$(2)\ldots x^2+(b-\sqrt{2ab+2b^2})x+b^2+ab-b\sqrt{2ab+2b^2}=0.$$

Les deux racines de l'équation (1) étant négatives, doivent être rejetées; les racines de l'équation (2) expriment les valeurs de x et y, puisque ces deux dernières quantités entrant de la même manière dans les équations données, auraient conduit à la même équation finale. On voit que l'équation (2) est précisément celle que le premier calcul a fournie.

9ᵉ Problème. *Connaissant la somme* a *des deux côtés* x, y, *de l'angle droit, et la longueur* h *de la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse* z, *trouver les trois côtés* x, y, z. On a

$$(1)\ldots x+y=a,\quad (2)\ldots xy=hz,\quad (3)\ldots x^2+y^2=z^2.$$

Les deux premières équations donnent

$$x^2+y^2=a^2-2hz.$$

Egalant les valeurs de x^2+y^2, on obtient l'équation finale

$$z^2=a^2-2hz,$$

qui donne $$z = -h + \sqrt{h^2 + a^2},$$

car z doit être positif.

z étant connu, les équations (1) et (2) font voir que x et y seront les racines de l'équation

$$t^2 - at + hz = 0.$$

Si l'on avait cherché l'équation finale en x, on aurait tiré des équations (1), (2), les valeurs

$$y = a - x, \quad z = \frac{x(a-x)}{h},$$

qui, reportées dans (3), auraient conduit à

$$x^4 - 2ax^3 + (a^2 - 2h^2)x^2 - 2ah^2x - a^2h^2 = 0;$$

équation qui se décompose dans les deux suivantes :

$$(4) \ldots \ x^2 - ax - h^2 + h\sqrt{h^2 + a^2} = 0,$$
$$(5) \ldots \ x^2 - ax - h^2 - h\sqrt{h^2 + a^2} = 0.$$

Or, des deux racines de l'équation (5), l'une est négative (puisque le dernier terme est négatif), et l'autre est positive et plus grande que a (puisque la somme des racines est égale au coefficient a); ces deux racines doivent donc être rejetées; on ne doit donc prendre que les deux racines de l'équation (4), elles font connaître à la fois x et y, puisque ces inconnues entrent de la même manière dans les équations primitives. On voit que cette équation est la même que celle en t qu'avait donnée le premier calcul.

10° Problème. *Trouver les trois côtés d'un triangle rectangle, connaissant la somme* a *de ces côtés, et la somme* b *de la hauteur et de l'hypoténuse.*

Soient, x l'hypoténuse, y et z les deux autres côtés, et h la hauteur, on aura les équations

$$x + y + z = a, \quad x + h = b, \quad hx = yz, \quad y^2 + z^2 = x^2.$$

La 1re et la 3e donnent

$$y^2+z^2=(a-x)^2-2hx;$$

d'où, au moyen de la 4e, on tire

$$(a-x)^2-2hx=x^2, \quad \text{ou} \quad a^2-2ax-2hx=0;$$

équation qui, jointe à la 2e, donne

$$x=\tfrac{1}{2}(a+b\pm\sqrt{b^2+2ab-a^2}), \quad h=\tfrac{1}{2}(b-a\pm\sqrt{b^2+2ab-a^2}).$$

Mais b étant nécessairement plus petit que a, le radical ne saurait être pris avec le signe supérieur, parce qu'alors h serait négatif; chacune des inconnues x, h, n'a donc qu'une seule valeur. Quant à y et z, on connaît leur somme $a-x$ et leur produit hx; ils sont donc racines d'une équation du second degré dont les coefficiens sont connus; on aura donc deux valeurs pour chacune de ces inconnues; mais comme elles entrent symétriquement dans les équations, cette équation du second degré aura y et z pour racines, et le problème ne sera susceptible que d'une seule solution.

Si l'on avait cherché l'équation finale en y ou en z, on l'eût trouvée du quatrième degré, et on l'eût ramenée au second, comme dans les problèmes précédens.

11e Problème. *Etant donnés, le périmètre, l'angle* A *et la surface d'un triangle, déterminer ses côtés.*

Soient x et y les deux côtés qui comprennent l'angle A, et z le troisième côté; désignons par a le périmètre, et par b^2 la surface du triangle; les conditions données fournissent les équations

$$x+y+z=a, \quad \cos A=\frac{x^2+y^2-z^2}{2xy}, \quad xy\sin A=2b^2.$$

Reportant dans la 2e équation la valeur de xy tirée de la 3e, on parvient à

$$x^2+y^2=z^2+\frac{4b^2\cos A}{\sin A}.$$

La 1re équation, combinée avec la dernière, donne

$$x^2+y^2=(a-z)^2-2xy=(a-z)^2-\frac{4b^2}{\sin A}.$$

Egalant ces deux valeurs de x^2+y^2, on trouve

$$z=\tfrac{1}{2}a-\frac{2b^2}{a}\left(\frac{1+\cos A}{\sin A}\right).$$

Or, $\sin A=2\sin\tfrac{1}{2}A\cos\tfrac{1}{2}A,\quad \cos A=2\cos^2\tfrac{1}{2}A-1,$

donc $$\frac{1+\cos A}{\sin A}=\frac{2\cos^2\frac{1}{2}A}{2\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A}=\cot\tfrac{1}{2}A.$$

Donc $$z=\frac{a}{2}-\frac{2b^2}{a}\cot\tfrac{1}{2}A.$$

On en déduira facilement les inconnues x et y, car on connaît leur somme $a-z$ et leur produit $\frac{2b^2}{\sin A}$.

12e Problème. (fig. 126). *Dans un angle donné* XAY, *mener une droite minimum* MN, *telle, que le triangle* AMN *soit égal à une surface donnée* m^2.

Soient $\quad MN=z,\quad AM=x,\quad AN=y;$

on aura $$z^2=x^2+y^2-2xy\cos A.$$

L'aire AMN ayant pour mesure $\frac{1}{2}xy\sin A$, et devant être égale à m^2, il s'ensuivra

$$xy\sin A=2m^2,\quad \text{d'où}\quad z^2=x^2+y^2-\frac{4m^2\cos A}{\sin A}.$$

Pour trouver le minimum de z^2, on égalera à zéro sa dérivée, et remarquant que la dérivée du produit constant xy doit aussi être nulle, on aura les deux équations suivantes, dans lesquelles x est la variable indépendante,

$$y+xy'=0,\quad 2x+2yy'=0;$$

d'où $$y'=-\frac{y}{x},\ \text{et par suite}\ 2x-\frac{2y^2}{x^2}=0;$$

ce qui donne $x^2 = y^2$, ou $x = y$;

car, le produit xy étant positif, x et y doivent être de mêmes signes.

L'équation $xy \sin A = 2m^2$ devient

$$x^2 \sin A = 2m^2, \quad \text{d'où} \quad x = m\sqrt{\frac{2}{\sin A}} = y.$$

13ᵉ Problème. (*Fig.* 127). *Etant donnés un angle* OBV, *et un point* A *sur le côté* OB, *inscrire dans cet angle une droite* MN *d'une longueur donnée, de telle sorte que l'angle* MNA *soit égal à* OBV.

Soient $MN = a$, $AB = b$, $BN = x$.

Les deux triangles semblables, BAN, AMN, donnent

$$x : a :: b : AN; \quad \text{d'où} \quad AN = \frac{ab}{x}.$$

Mais on a d'ailleurs

$$\overline{AN}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BN}^2 - 2AB \times BN \cos B, \quad \text{ou} \quad \overline{AN}^2 = b^2 + x^2 - 2bx \cos B;$$

donc $$\frac{a^2b^2}{x^2} = b^2 + x^2 - 2bx \cos B; \quad \text{d'où}$$

$$x^4 - 2bx^3 \cos B + b^2x^2 - a^2b^2 = 0.$$

Cette dernière équation fournit toujours une valeur réelle positive de x.

14ᵉ Problème. (*Fig.* 128). *Trouver les côtés* x, y, z *d'un triangle, sachant que ces côtés et la hauteur* h *du triangle forment la progression arithmétique*

$$\div x \,.\, y \,.\, z \,.\, h.$$

Cette progression donne

$$(1) \ldots \; 2y = x + z, \quad 2z = y + h.$$

Or, $AD = \sqrt{x^2 - h^2}$, $BD = \sqrt{y^2 - h^2}$, $AD + BD = z$;

donc $$(2)\ldots z=\sqrt{x^2-h^2}+\sqrt{y^2-h^2}.$$

Une des inconnues x, y, z, h reste arbitraire, car on n'a que les trois équations (1) et (2), entre ces quatre inconnues.

Les équations (1) donnent

$$y=2z-h,\ x=3z-2h.$$

Reportant ces valeurs dans l'équation (2), elle devient

$$\sqrt{(3z-2h)^2-h^2}+\sqrt{(2z-h)^2-h^2}=z.$$

Si l'on fait successivement disparaître les radicaux, on trouvera

$$9h^3-48zh^2+88z^2h-48z^3=0.$$

Cette équation renfermant deux inconnues z, h, on peut assigner des valeurs arbitraires à l'une de ces inconnues; l'autre inconnue dépendra d'une équation du troisième degré, qui aura toujours une racine réelle positive. Le problème admet donc toujours une infinité de solutions.

15ᵉ Problème. (*Fig.* 129). *Etant données la base* AB *d'un triangle* ABC, *et une droite* MN *sur laquelle se trouve le sommet inconnu* C; *sachant de plus que la base est moyenne arithmétique entre les deux autres côtés, résoudre le triangle.*

Concevez la perpendiculaire CD à AB; soient F le milieu de AB, et E le point où AB prolongé rencontre MN. Faisons

$$AB=a,\ FE=b,\ BC-AB=x.$$

Nous aurons $BC=a+x$, et $AC=a-x$,

puisque a est moyenne arithmétique entre CB et AC. Mais

$$BD=\frac{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-\overline{AC}^2}{2AB}=2x+\frac{a}{2};$$

donc

$$FD=2x,\ DE=b-ax,\ CD=\sqrt{\overline{CB}^2-\overline{DB}^2}=\sqrt{\tfrac{3}{4}a^2-3x^2}.$$

Or $$CD=DE\times\text{tang } E.$$

Substituant dans cette dernière équation les valeurs précédentes de DE et de CD, il vient

$$\sqrt{\tfrac{3}{4}a^2 - 3x^2} = (b - 2x) \text{ tang E}.$$

Elevant au carré, et faisant $\text{tang E} = m$, on trouve

$$(1) \ldots (4m^2+3)x^2 - 4bm^2x + (m^2b^2 - \tfrac{3}{4}a^2) = 0;$$

ce qui donne

$$x = \frac{2bm^2 \pm \sqrt{\tfrac{9}{4}a^2 + 3m^2a^2 - 3m^2b^2}}{4m^2+3}.$$

Pour que x soit réel, il suffit et il faut que.......... $\frac{9}{4}a^2 + 3m^2a^2 - 3m^2b^2$ ne soit pas négatif.

Quand $m^2b^2 > \frac{3}{4}a^2$, les deux racines de l'équation (1) sont positives, et le problème admet deux solutions.

Lorsque $m^2b^2 = \frac{3}{4}a^2$, une des valeurs d'x est nulle, et détermine pour ABC un triangle équilatéral.

Enfin, quand $m^2b^2 < \frac{3}{4}a^2$, l'équation (1) n'ayant qu'une seule racine positive, il n'y a qu'une solution.

16e Problème. (*Fig.* 130). *Etant donnés les angles, le périmètre et la surface d'un trapèze* ABCD, *trouver ses côtés.*

Soient, a le périmètre, et b^2 la surface du trapèze; désignons AB par x et BC par y, nous aurons

$$\text{CE} : y :: \sin \text{B} : \sin \text{E}, \quad \text{et} \quad \text{BE} : y :: \sin \text{C} : \sin \text{E};$$

d'où, en représentant par m et n les rapports connus de ces sinus, $\text{CE} = my$, $\text{BE} = ny$.

Désignant de même par p et q les rapports connus de AD à EA et de ED à EA, et remarquant que $\text{AE} = x + ny$, on aura

$$\text{AD} = p(x+ny), \ \text{DE} = q(x+ny), \ \text{CD} = q(x+ny) - my.$$

Faisant la somme des quatre côtés du trapèze, l'égalant à a, et posant

$$1 + p + q = \alpha, \quad 1 + pn + qn - m = 6,$$

on parvient à

$$\alpha x + \beta y = a.$$

De plus, les triangles EAD, EBC, ayant leurs angles donnés, il est facile de construire un triangle qui leur soit semblable, et d'en déduire le rapport qui existe entre l'un quelconque d'entre eux, et le carré d'un de ses côtés. On peut donc regarder comme connu le rapport r de EBC à $\overline{BC}^2$, et le rapport s de EAD à $\overline{AE}^2$; ce qui conduit à

$$EBC = r \times \overline{BC}^2 = ry^2, \ EAD = s \times \overline{AE}^2 = s(x+ny)^2.$$

La surface du trapèze étant la différence de ces deux triangles et étant égale à b^2, il en résulte l'équation

$$(x^2+2nxy+n^2y^2)s-ry^2=b^2, \text{ ou } (n^2s-r)y^2+2nsxy+sx^2=b^2,$$

qui, jointe à $\alpha x + \beta y = a$, déterminera les valeurs de x et y.

17ᵉ Problème. (*Fig.* 131). *Par un point* B *donné sur la ligne qui divise l'angle droit* Y'AX *en deux parties égales, mener une droite* BMN *telle, que la partie interceptée entre ces droites soit d'une longueur donnée* 2a.

Soit x la distance du point B au milieu de MN, et b la perpendiculaire abaissée de B sur AY'; les deux parallèles AM, BC, donnent

$$\begin{aligned} AM : BC &:: MN : BN, \quad \text{ou} \quad AM : b :: 2a : x + a, \\ AN : AC &:: MN : BM, \quad \text{ou} \quad AN : b :: 2a : x - a. \end{aligned}$$

De plus, $\overline{AM}^2 + \overline{AN}^2 = \overline{MN}^2 = 4a^2.$

Remplaçant AM et AN par leurs valeurs, déduites des deux proportions, on parvient à l'équation

$$x^4 - 2(a^2+b^2)x^2 + (a^2-2b^2)a^2 = 0,$$

qui donne, en rejetant les valeurs négatives de x,

$$x = \sqrt{a^2+b^2 \pm \sqrt{b^4+4a^2b^2}}.$$

Ces deux valeurs de x seront réelles si l'on a

$$a^2+b^2>\sqrt{b^4+4a^2b^2}, \quad \text{ou} \quad a^2>b^2;$$

c'est-à-dire, si la ligne donnée $2a$ est plus grande que la perpendiculaire KH menée à AB par le point B, et terminée aux côtés de l'angle Y'AX. Quand cette condition est remplie, il y a quatre solutions, dont deux sont comprises dans l'angle Y'AX, et les deux autres dans chacun des angles droits adjacens. Lorsque $a^2=2b^2$, les deux premières solutions se réduisent à une seule. Quand $a^2<2b^2$, il n'y a que les deux solutions comprises dans l'angle YAX et son opposé au sommet.

Connaissant x, on construira AM ou BM, et on en déduira immédiatement la direction BN.

Le problême se résoudrait de la même manière si l'angle donné n'était pas droit.

18° Problème. (*Fig.* 132). *Mener par deux points donnés* A, B, *un cercle tangent à un cercle donné* F.

Soit C le centre du cercle cherché, et E le point de contact; abaissons sur la droite indéfinie AB les perpendiculaires CD, FG; menons FK parallèle à AB, et prolongeons DC jusqu'à sa rencontre H avec FK. Faisons

$$AB=2a, \quad FH=b, \quad FG=c, \quad EF=d, \quad CD=x;$$

nous aurons

$$CH=c-x, \quad \overline{CF}^2=\overline{FH}^2+\overline{CH}^2=b^2+(c-x)^2.$$

Mais les cercles se touchant extérieurement en E, on a

$$CF=d+CE=d+CB=d+\sqrt{a^2+x^2}.$$

Donc $\quad b^2+(c-x)^2=a^2+x^2+d^2+2d\sqrt{a^2+x^2};$

d'où $\quad 2d\sqrt{a^2+x^2}=b^2+c^2-a^2-d^2-2cx.$

Elevant les deux membres au carré, et faisant......... $b^2+c^2-a^2-d^2=2m^2$, il vient

$$(d^2-c^2)x^2+2m^2cx+a^2d^2-m^4=0;$$

d'où $$x = \frac{-m^2c \pm \sqrt{m^4d^2 + a^2c^2d^2 - d^4a^2}}{d^2 - c^2}.$$

Mais si l'on avait considéré un cercle tangent, dans l'intérieur duquel se serait trouvé le cercle F, il n'y aurait eu de différence qu'en ce que l'on aurait eu

$$CF = CB - d, \quad \text{au lieu de} \quad CF = CB + d;$$

et comme d n'entre dans x qu'au second degré, il s'ensuit que ces deux valeurs de x conviennent l'une au contact intérieur, l'autre au contact extérieur.

Les élèves discuteront cette formule, et reconnaîtront facilement dans quel cas elle est réelle ou imaginaire, positive ou négative, et quelles sont les circonstances géométriques correspondantes.

19° Problème. (*Fig.* 133). *Etant donné un point lumineux* A, *d'où partent des rayons divergens, qui viennent frapper une surface sphérique réfringente* VB, *dont le centre est* C, *trouver le point où chaque rayon lumineux réfracté rencontre le diamètre de la sphère qui passe par le point lumineux.*

La réfraction est la déviation que subit un rayon de lumière en passant d'un milieu dans un autre. On sait que le rayon incident et le rayon réfracté sont dans un même plan avec la normale menée au point où ils rencontrent la surface qui sépare les deux milieux, et que les sinus des angles qu'ils font avec cette normale sont dans un rapport constant, quelle que soit l'inclinaison du rayon incident sur la surface.

Cela posé, soit AB un rayon incident, qui se réfracte suivant BD. Abaissons BG, CE, CF, perpendiculaires sur les directions AD, AB, BD.

Si l'on fait $AC = a, \quad BC = r, \quad CG = d, \quad CD = z,$ on aura

$$AG = a - d, \quad BG = \sqrt{r^2 - d^2},$$
$$AB = \sqrt{(a-d)^2 + r^2 - d^2} = \sqrt{a^2 - 2ad + r^2}.$$

Or, $\frac{CE}{CA} = \frac{BG}{AB}$ et $\frac{CF}{CD} = \frac{BG}{BD}$.

On en déduit

$$CF = \frac{z\sqrt{r^2 - d^2}}{\sqrt{r^2 - d^2 + (d + z)^2}} = \frac{z\sqrt{r^2 - d^2}}{\sqrt{z^2 + 2dz + r^2}};$$

et, comme on connaît le rapport des sinus des angles d'incidence et de réfraction, on peut poser

$$\frac{CE}{CF} = \frac{a}{f};$$

ce qui donnera, en substituant les valeurs de CE et de CF,

$$\frac{af\sqrt{r^2 - d^2}}{\sqrt{a^2 - 2ad + r^2}} = \frac{az\sqrt{r^2 - d^2}}{\sqrt{z^2 + 2dz + r^2}}.$$

Supprimant le facteur commun $a\sqrt{r^2 - d^2}$, et élevant le résultat au carré, il vient

$$(1) \ldots f^2(z^2 + 2dz + r^2) = z^2(a^2 - 2ad + r^2).$$

Faisant $a^2 - 2ad + r^2 - f^2 = m^2$, l'équation (1) donne

$$z = \frac{1}{m^2}\left(df^2 \pm \sqrt{d^2f^4 + m^2r^2f^2}\right).$$

On connaîtra donc z ou CD; ce qui résout le problème.

APPLICATION DE L'ALGÈBRE

A LA RECHERCHE

DES LIEUX GÉOMÉTRIQUES PLANS.

231. 1er Problème. (*Fig.* 134). *Etant donnés un point* A *et une droite* YY′, *trouver le lieu des points* M, *tel, que le rapport de leurs distances au point* A *et à la droite* YY′; *soit celui de* m *à* n.

Prenons YY′ pour axe des y, et la perpendiculaire XAB pour axe des x; abaissons la perpendiculaire MP sur BX; nommons x', y', les coordonnées du point M, et faisons $AB = b$; nous aurons

$$AM : MP :: m : n, \quad \text{ou} \quad \sqrt{y'^2 + (b - x')^2} : x' :: m : n;$$

d'où $$n^2y'^2 + (n^2 - m^2)x'^2 - 2n^2bx' + n^2b^2 = 0.$$

Le lieu géométrique demandé sera donc une ellipse, une parabole ou une hyperbole, selon que l'on aura

$$n > m, \quad n = m, \quad n < m.$$

La droite YY′ se nomme la *directrice* de la courbe. Dans le cas de la parabole, tous les points de la courbe sont également éloignés de cette droite et du point F; on reconnaîtra facilement que ce point en est le *foyer*, en remarquant que l'équation se réduisant alors à $y^2 - 2bx + b^2 = 0$, devient, en transportant l'origine au milieu de AB, $y^2 - 2bx = 0$.

Dans le cas de l'ellipse et de l'hyperbole, on verra, en cherchant la position du centre et la valeur des axes, que le point A est un des *foyers* de la courbe, et que le rapport de m à n est $\frac{c}{a}$, en appelant $2c$ la distance des deux foyers, et $2a$ le grand axe; et enfin que la distance du point B au centre est

$\frac{a^2}{c}$; d'où il suivra que, dans l'hyperbole, la directrice est entre le centre et le sommet, tandis que dans l'ellipse, la directrice est en dehors.

On reconnaîtra de plus qu'en faisant varier la position relative du point donné et de la droite donnée, ainsi que le rapport $\frac{m}{n}$, on pourra obtenir toute courbe donnée du second degré, pourvu qu'elle ne soit pas un cercle.

Il en résulte que toute ellipse, ou toute hyperbole, a deux directrices qui passent par les deux foyers, et que toute parabole a une seule directrice qui passe par le foyer.

On pourrait prendre la question d'une manière inverse, et se proposer le problème suivant, que nous nous dispenserons de résoudre.

2ᵉ Problème. *D'un foyer d'une courbe du second degré, on mène un rayon quelconque à la courbe, et par son extrémité une parallèle à l'axe qui contient ce foyer, de telle sorte que le rapport de ces deux lignes variables soit constant. On demande le lieu des extrémités de la parallèle à l'axe, pour une valeur donnée du rapport, et quelle valeur il faudrait donner à ce rapport pour que le lieu fût une ligne droite.*

3ᵉ Problème. *Trouver le lieu des intersections de deux tangentes à une ellipse, qui se meuvent de manière à être toujours parallèles à un système de diamètres conjugués.*

Soient x', y' et x'', y'', les coordonnées des deux points de contact, et $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ l'équation de l'ellipse; les équations des tangentes seront

$$(1)\ldots a^2yy' + b^2xx' = a^2b^2, \quad (2)\ldots a^2yy'' + b^2xx'' = a^2b^2.$$

On aura en même temps

$$(3)\ldots a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2, \quad (4)\ldots a^2y''^2 + b^2x''^2 = a^2b^2.$$

De plus, ces tangentes devant être parallèles à deux diamètres conjugués, le produit des tangentes trigonométriques des angles qu'elles font avec l'axe des x, doit être égal à $-\frac{b^2}{a^2}$; ce

qui donne

$$\frac{b^4x'x''}{a^4x'y''} = -\frac{b^2}{a^2}, \quad \text{ou} \quad (5)\ldots\ b^2x'x'' + a^2y'y'' = 0.$$

Désignant par x, y, les coordonnées du point de rencontre des tangentes, elles satisferont aux équations (1), (2), de ces droites; et pour avoir une équation où ces coordonnées soient les seules variables, ce qui sera l'équation du lieu demandé, il suffira d'éliminer x', y', x'', y'', entre les cinq équations précédentes.

Pour simplifier cette élimination, on observera qu'il suffit de trouver l'expression des produits $x'x''$, $y'y''$, en fonction de x et y, et de les reporter dans l'équation (5). Eliminant d'abord y' entre les équations (1) et (3), il vient

$$(6)\ldots\ (a^2y^2 + b^2x^2)x'^2 - 2a^2b^2xx' + a^4(b^2 - y^2) = 0.$$

Or, l'équation en x'', résultant de l'élimination de y'' entre (2) et (4), eût été la même; les deux racines de l'équation (6) expriment donc x' et x''; de sorte que

$$(7)\ldots\ x'x'' = \frac{a^4(b^2 - y^2)}{a^2y^2 + b^2x^2}.$$

Mais, si l'on change les x en y, et b en a, et réciproquement, les équations primitives ne changeront pas; il en sera de même de tous les résultats de leurs combinaisons; et ce changement fait dans (6), donne

$$(8)\ldots\ y'y'' = \frac{b^4(a^2 - x^2)}{b^2x^2 + a^2y^2}.$$

Reportant les valeurs (7), (8), de $x'x''$ et $y'y''$, dans l'équation (5), on trouve que l'équation du lieu géométrique demandé est

$$a^2y^2 + b^2x^2 = 2a^2b^2.$$

Ainsi, ce lieu est une ellipse ayant pour axes $a\sqrt{2}$ et $b\sqrt{2}$, et par conséquent *semblable* à la proposée, puisque le rapport des axes est le même.

On pourra résoudre le même problème pour l'hyperbole.

4° Problème. *Trouver le lieu des intersections de deux tangentes à une ellipse, qui se meuvent de manière à faire constamment un angle donné, dont la tangente trigonométrique est* m.

Soit $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, l'équation de l'ellipse donnée; si nous désignons par p', p'', les tangentes trigonométriques des angles que font avec l'axe des x les deux tangentes à l'ellipse, on aura la condition

$$(1)\dots \frac{p'-p''}{1+p'p''}=m.$$

Il s'agit d'exprimer p' et p'', en fonction des coordonnées du point de rencontre des tangentes. Cherchons donc une équation qui ait p' et p'' pour racines. Soit pour cela l'équation d'une droite quelconque

$$y=px+q;$$

en cherchant son intersection avec l'ellipse, et exprimant que les deux points d'intersection se confondent en un seul, on trouve la condition

$$(2)\dots q^2=a^2p^2+b^2.$$

Désignant par x', y' les coordonnées du point d'où l'on fait partir cette tangente, on aura

$$y'=px'+q;\quad \text{d'où}\quad q=y'-px'.$$

Reportant cette valeur de q dans l'équation (2), il vient

$$y'^2+p^2x'^2-2px'y'=a^2p^2+b^2,$$

ou $$p^2(a^2-x'^2)+2px'y'+b^2-y'^2=0.$$

Les deux valeurs de p tirées de cette équation, exprimant p' et p'' on en conclura, d'après les propriétés connues des racines,

$$pp'=\frac{b^2-y'^2}{a^2-x'^2},\quad \text{et}\quad p-p'=\frac{\sqrt{a^2y'^2+b^2x'^2-a^2b^2}}{a^2-x'^2}.$$

Reportant ces valeurs dans l'équation (1), on aura pour l'équa-

tion du lieu cherché

$$m = \frac{\sqrt{a^2y'^2 + b^2x'^2 - a^2b^2}}{a^2 + b^2 - y'^2 - x'^2}.$$

Chassant le dénominateur et élevant les deux membres au carré, on trouvera une équation du quatrième degré, qui conviendra aussi bien à $-m$ qu'à $+m$, puisque m n'y entre qu'au carré. Cette équation déterminera donc les deux courbes fermées, relatives au cas de l'angle donné, et de son supplément. Ces courbes ne peuvent être données par des équations rationnelles séparées, parce que l'équation trouvée du quatrième degré, ne peut se décomposer en deux équations rationnelles du second degré.

Remarque. Lorsque l'angle donné est droit, m est infini, le dénominateur $a^2 + b^2 - y'^2 - x'^2$ est donc nul; ce qui donne pour le lieu cherché, $y^2 + x^2 = a^2 + b^2$, équation qui représente un cercle concentrique à l'ellipse, et ayant pour rayon $\sqrt{a^2 + b^2}$.

On ferait le même calcul pour l'hyperbole.

Quant à la parabole, on trouvera pour lieu géométrique une hyperbole dont les deux branches seront déterminées, l'une par l'angle aigu des tangentes, l'autre par l'angle obtus supplémentaire. Cette hyperbole se réduira à la directrice, quand l'angle donné sera droit.

5ᵉ Problème. (*Fig.* 135). *Par deux points donnés* B, G, *on mène deux droites* BM, CM, *telles, que l'angle* MCB *soit double de* MBC. *On demande le lieu des points* M.

Prenons le milieu A de BC pour origine, BCX pour axe des x, la perpendiculaire AY à BX pour axe des y, et faisons $BC = 2a$. Les équations des deux droites CM, BM, seront

$$(1)\ldots\ y = m(x - a), \quad (2)\ldots\ y = n(x + a).$$

La tangente de l'angle MCB sera $-m$, et celle de MBC sera n.

Or, $\tang 2\alpha = \frac{2 \tang \alpha}{1 - \tang^2 \alpha}$; donc $(3)\ldots -m = \frac{2n}{1 - n^2}$.

Éliminant m et n entre les équations (1), (2), (3), et obser-

vant que x et y, considérés comme les mêmes dans ces équations, représentent les coordonnées du point de rencontre M des deux droites, on trouvera que l'équation du lieu cherché, se réduit à

$$y(y^2-3x^2-2ax+a^2)=0.$$

Le facteur y égalé à zéro, donne pour lieu l'axe des x; et en effet, quand la droite BM prend la direction BX, l'angle MBX devient nul, l'angle MCB qui en est le double, se réduit donc à zéro; la droite CM est donc aussi appliquée sur l'axe des x, et tous les points de cet axe seront communs aux deux droites. Cet axe sera donc un des lieux qui satisfont à la question.

Il y a encore un autre lieu donné par l'équation

$$y^2-3x^2-2ax+a^2=0,$$

qui représente une hyperbole. On obtiendra son centre O, en portant sur AB une quantité $AO=\frac{1}{3}a$. Prenant le point O pour origine, l'équation deviendra

$$y^2-3x^2=-\frac{4}{3}a^2,$$

et l'hyperbole sera rapportée à ses axes. On aura les deux sommets en portant, à partir de O des abcisses, $x=\pm\frac{2}{3}a$, et ses asymptotes feront avec l'axe des x, des angles ayant pour tangentes trigonométriques $\pm\sqrt{3}$.

La condition géométrique proposée ne donne la construction que d'une seule branche de l'hyperbole.

On aurait pu calculer d'avance le point où cette branche rencontre l'axe des x, en posant la proportion

$$\mathrm{BM} : \mathrm{MC} :: \sin \mathrm{MCB} : \sin \mathrm{MBC} :: 2 \cos \mathrm{MBC} : 1.$$

Faisant converger l'angle MBC vers zéro, le rapport de BM à MC tend vers celui de 2 à 1, et comme le point M se rapproche indéfiniment de l'axe des x, on obtiendra le sommet en partageant BC dans le rapport de 2 à 1, et prenant $CD=\frac{1}{3}BC$; c'est aussi ce que donne l'équation de la courbe.

Corollaire. On peut en déduire la *trisection d'un angle quelconque*. Il suffit pour cela de décrire sur BC un segment capable du supplément de l'angle donné, et de chercher le point M de sa rencontre avec l'hyperbole; car la somme des deux angles B, C, sera égale à l'angle donné, et par conséquent MBC en sera le tiers.

6e Problème. *Trouver le lieu des centres des cercles tangens à deux cercles donnés.*

Nous prendrons pour axe des x la droite qui passe par les centres A, B, des cercles donnés, parce que la courbe devant être symétrique par rapport à cette droite, il n'y aura dans l'équation aucune puissance impaire de y. Désignons par R et r les rayons des deux cercles donnés, par a la distance de leurs centres; supposons que A soit le centre du plus grand cercle dont le rayon est R, et qu'on prenne ce point pour origine des coordonnées.

Nous observerons d'abord que le cercle variable peut être tangent de plusieurs manières aux cercles donnés, que nous supposerons d'abord extérieurs l'un à l'autre, sans avoir aucun point commun. Ce cercle peut être extérieur aux deux proposés, ou les renfermer l'un et l'autre, ou enfin être extérieur à l'un et renfermer l'autre.

Considérons d'abord les deux premiers cas; soient O, O′ (*fig.* 136) les centres, et z, z' les rayons de deux cercles pris dans chacune des deux séries de cercles tangens; nous aurons

$$OA = R + z,\quad OB = r + z;\quad \text{d'où}\quad OA - OB = R - r,$$
$$O'A = z' - R,\quad O'B = z' - r;\quad \text{d'où}\quad O'B - O'A = R - r;$$

ce qui apprend que le lieu des points O est une des branches d'une hyperbole dont les foyers sont A et B, dont l'axe qui coupe la courbe est $R - r$, et que les points O′ déterminent la seconde branche de la même hyperbole.

Pour trouver l'équation de cette hyperbole, il suffit d'exprimer les distances OA, OB, en fonction des coordonnées x, y, du point O. Mais,

$$OA = \sqrt{x^2 + y^2},\quad OB = \sqrt{y^2 + (a - x)^2};$$

donc $\quad (1)\ldots \sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{y^2+(a-x)^2}=\mathrm{R}-r.$

Soit $a^2-(\mathrm{R}-r)^2=\alpha$. L'équation (1), débarrassée de radicaux, se réduit à

$$(2)\ldots(\mathrm{R}-r)^2y^2-\alpha x^2+\alpha ax+\alpha^2=0.$$

Discutons cette équation :

Lorsque les deux cercles sont extérieurs, on a $(\mathrm{R}-r)^2<a^2$; α est donc positif, la courbe est donc une hyperbole, comme nous l'avions déjà remarqué.

Quand les deux cercles deviennent tangens extérieurement, on a $a=\mathrm{R}+a$; et l'équation (2) se réduit à

$$(\mathrm{R}-a)^2y^2-\mathrm{R}rx^2+\mathrm{R}r(\mathrm{R}+r)x-4\mathrm{R}^2r^2=0.$$

Lorsque les cercles se coupent, on a $(\mathrm{R}-r)^2<a^2$, et la courbe est encore une hyperbole.

Quand le cercle B est tangent intérieurement au cercle A, on a $a=\mathrm{R}-r$, et l'équation (2) se réduit à $(\mathrm{R}-r)^2y^2=0$; ce qui donne l'axe des x. Et, en effet, les cercles tangens aux deux proposés, soit extérieurement, soit en les enveloppant l'un et l'autre, auront nécessairement leurs centres sur la droite qui joint les centres A et B, puisque leur contact ne pourra jamais avoir lieu qu'au point même de contact des cercles A et B.

Enfin, lorsque le cercle B devient intérieur au cercle A, on a $(\mathrm{R}-a)^2>a^2$, et l'équation (2) représente une ellipse.

Pour expliquer ce changement, il suffit d'observer que, lorsqu'on a fait disparaître les radicaux de l'équation (1), on a obtenu le même résultat que si le premier membre eût été leur somme au lieu d'être leur différence; l'ellipse que l'on obtient est donc celle qu'on aurait eue en posant $\mathrm{OA}+\mathrm{OB}=\mathrm{R}-r$, et qui ne convient dans aucun cas à la question. Mais ces deux courbes ne peuvent être fournies que l'une après l'autre, parce que la différence $\mathrm{OA}-\mathrm{OB}$ doit toujours être plus petite que AB, tandis que la somme $\mathrm{OA}+\mathrm{OB}$ doit être plus grande que

AB. On n'aura donc l'hyperbole que dans le cas de $R - r < a$, et l'ellipse dans le cas de $R - r > a$.

Passons maintenant aux cercles tangens extérieurement à l'un des deux proposés, et intérieurement à l'autre. On aura alors (*fig.* 137),

$$OA = z + R, \quad OB = z - r; \quad \text{d'où} \quad OA - OB = R + r.$$

Pour le cercle tangent extérieurement à B et intérieurement à A, on aurait

$$O'B - O'A = R + r.$$

On obtiendra les deux branches d'une hyperbole ayant pour foyers A et B, et dont l'axe qui coupe la courbe sera $R + r$. On observera de plus que pour obtenir l'équation du lieu cherché, il suffira de changer r en $-r$, dans l'équation (2). Faisant $a^2 - (R + r)^2 = \mathcal{C}$, on trouvera ainsi que l'équation du lieu cherché est

$$(3) \ldots (R + r)^2 y^2 - \mathcal{C}x^2 + \mathcal{C}ax - \mathcal{C}^2 = 0.$$

Ce lieu sera une hyperbole si l'on a $R + r < a$, c'est-à-dire si les cercles donnés sont extérieurs.

Il se réduira à l'axe des x si $R + r = a$, auquel cas les deux cercles sont tangens extérieurement.

Enfin, si on a $R + r > a$, c'est-à-dire si les cercles donnés sont intérieurs l'un à l'autre, l'équation (3) représentera une ellipse, quoiqu'on ait obtenu cette équation d'après une propriété caractéristique de l'hyperbole. La raison en est que, comme dans le cas précédent, la disparition des radicaux a produit le même résultat que si l'on avait eu la somme $OA + OB$ au lieu de la différence $OA - OB$; mais dans ce cas-ci, l'ellipse convient à la question, parce qu'elle est déduite de l'équation $OA + OB = R + r$, qui est précisément celle qui se rapporte au cas que nous considérons.

7ᵉ PROBLÈME. (*Fig.* 138). *Etant donné un angle* YAX, *on demande le lieu décrit par le centre de gravité du triangle* ABC, *en supposant que l'aire de ce triangle soit constante, ou que* BC *soit d'une longueur donnée.*

Choisissons AX et AY pour axes de coordonnées. Soit M le milieu de BC; prenant $AN = \frac{2}{3} AM$, le point N sera le centre de gravité du triangle ABC; tirons les parallèles MP, NQ à AY, et nommons x, y, les coordonnées AQ, QN, de N; nous aurons

$$MP = \tfrac{1}{2}BA, \quad AP = \tfrac{1}{2}AC, \quad y = \tfrac{2}{3}MP = \tfrac{1}{3}BA, \quad x = \tfrac{2}{3}AP = \tfrac{1}{3}AC;$$

d'où $$AB = 3y, \quad AC = 3x.$$

Cela posé : 1°. lorsque l'aire ABC reste invariable, le produit $AB \times AC$ est égal à une constante m^2. Ce qui donne

$$3y \times 3x = m^2,$$

pour l'équation du lieu géométrique demandé. Cette équation représente une hyperbole ayant pour asymptotes AX et AY.

2°. Lorsqu'on suppose que BC est une constante a, on a

$$a^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2AC \times AB \times \cos YAX.$$

Désignant cos YAX par b, et remplaçant AB et AC par leurs valeurs $3y$, $3x$, le résultat

$$y^2 + x^2 - 2bxy = (\tfrac{1}{3}a)^2,$$

est l'équation du lieu géométrique demandé. Cette équation représente une ellipse rapportée à son centre. L'ellipse devient un cercle quand $b = 0$, c'est-à-dire quand l'angle YAX est droit.

8ᵉ Problème. (*Fig.* 139). *Trouver le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du point fixe* A, *sur une droite* $BC = a$, *que l'on inscrit de toutes les manières possibles entre deux droites* XX′, YY′, *perpendiculaires entre elles.*

Prenant AX et AY, pour axes des coordonnées, désignant AC par α et BA par $\mathcal{C}$, l'équation de BC sera

$$\mathcal{C}x + \alpha y = \alpha\mathcal{C}.$$

La perpendiculaire AM abaissée de l'origine A, sur BC, aura pour équation $$\alpha x - \mathcal{C}y = 0,$$
et on aura la condition $$\alpha^2 + \mathcal{C}^2 = a^2.$$

Ces trois équations auront lieu pour chacun des quatre

angles droits formés en A. Eliminant entre elles les variables α, C, on obtiendra une équation entre les coordonnées x, y, du point de rencontre des droites BC, AM, et qui représentera le lieu cherché; elle sera

$$(x^2+y^2)^3=a^2x^2y^2.$$

La génération de ce lieu fait voir immédiatement, qu'il se compose de quatre branches égales, situées dans chacun des angles YAX, YAX′, Y′AX, Y′AX′, et symétriques chacune par rapport à la droite qui divise en deux parties égales l'angle dans lequel elle se trouve; ces branches passent toutes par l'origine.

Pour reconnaître sous quel angle la courbe rencontre les axes à l'origine, cherchons la valeur de $\frac{y}{x}$; et pour cela développons l'équation de la courbe, et divisons-la par x^4, il viendra

$$(1)\ldots\left(\frac{y}{x}\right)^4 y^2+(3y^2-a^2)\left(\frac{y}{x}\right)^2+3y^2+x^2=0,\quad \text{d'où}$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2=\frac{a^2-3y^2\pm\sqrt{(a^2-3y^2)^2-4y^2(3y^2+x^2)}}{2y^2};$$

valeurs qui pour $x=0$ et $y=0$, donnent

$$\frac{y}{x}=0 \quad \text{et} \quad \frac{y}{x}=\infty;$$

ce qui fait voir que la courbe est tangente à l'axe des x et à l'axe des y.

L'*équation polaire* de cette courbe est très simple, en prenant A pour pôle, et faisant

$$AM=R,\quad x=R\cos\varphi,\quad y=R\sin\varphi.$$

Substituant ces valeurs de x et y, dans (1), on trouve que l'équation polaire de la courbe se réduit à

$$(2)\ldots R=a\sin\varphi\cos\varphi.$$

C'est ce que l'on aurait pu obtenir directement en observant que l'on a $AM=R=AB\sin\varphi$ et $AB=a\cos\varphi$;

d'où $(2)\ldots R = a \sin\varphi \cos\varphi = \frac{1}{2} a \sin 2\varphi$.

L'équation (2) est plus facile à discuter que l'équation (1); on reconnaîtra que le maximum de R correspond à celui de $\sin 2\varphi$, qui a lieu pour $\varphi = \frac{1}{4}\pi$ et $R = \frac{1}{2}a$; que la courbe est symétrique par rapport aux lignes qui partagent en deux parties égales les quatre angles en A.

De plus, pour chacune des valeurs

$$\varphi = 0,\quad \varphi = \tfrac{1}{2}\pi,\quad \varphi = \pi,\quad \varphi = \tfrac{3}{2}\pi,\quad \varphi = 2\pi,$$

on trouve $R = 0$; d'où il suit que la courbe commence par être tangente à l'axe des x, puis devient tangente à l'axe des y; et ainsi de suite successivement toutes les fois que la courbe revient à l'origine.

9ᵉ Problème. (*Fig.* 140). *D'un point donné* A, *on mène à une courbe du second degré deux sécantes quelconques...* ABE, ACD; *on joint deux à deux les points de rencontre avec la courbe. Il s'agit de trouver le lieu des points d'intersection* M *et* N *de ces droites entre elles.*

Prenons AEX pour axe des x et ADY pour axe des y. Soit

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0,$$

l'équation de la courbe par rapport à ce système; a, b, c, d, e, f, seront des quantités qui varieront quand on passera à deux autres sécantes. Faisons

$$AB = \alpha,\quad AE = \alpha',\quad AC = \beta,\quad AD = \beta',$$

α et α' seront racines de l'équation

$$(1)\ \ldots\ cx^2 + ex + f = 0,$$

et β, β' seront racines de

$$(2)\ \ldots\ ay^2 + dy + f = 0.$$

Cela posé, les équations des droites DE, CB, sont

$$\frac{y}{\beta'} + \frac{x}{\alpha'} = 1,\quad \frac{y}{\beta} + \frac{x}{\alpha} = 1.$$

Pour éliminer $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$, ajoutons ces deux dernières équations membre à membre ; il en résultera

$$(3) \ldots \left(\frac{\beta'+\beta}{\beta\beta'}\right)y + \left(\frac{\alpha'+\alpha}{\alpha\alpha'}\right)x = 2.$$

Mais, α et α' étant racines de l'équation (1), on a

$$\alpha + \alpha' = -\frac{e}{c} \quad \text{et} \quad \alpha\alpha' = \frac{f}{c}.$$

De même, β et β' étant racines de l'équation (2), on a

$$\beta + \beta' = -\frac{d}{a} \quad \text{et} \quad \beta\beta' = \frac{f}{a}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (3), elle donne

$$dy + ex + 2f = 0.$$

Il est facile de voir que cette équation est celle de la droite pnM, qui passe par les points de contact n, p, des tangentes menées à la courbe par le point donné A (*). Cette droite est donc le lieu cherché des points M.

Quant au point N, il est déterminé par la rencontre des droites DB et EC, dont les équations sont respectivement

$$\frac{y}{\beta'} + \frac{x}{\alpha} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{y}{\beta} + \frac{x}{\alpha'} = 1.$$

(*) On se rappellera pour cela que l'équation générale de la tangente au point x', y', de la courbe ayant pour équation $ay^2+bxy+cx^2+dy+ex+f=0$ est

$$2ayy' + b(xy'+yx') + 2cxx' + d(y+y') + e(x+x') + 2f = 0.$$

Or, si par un point α, β, on veut mener une tangente, on aura entre x' et y' l'équation

$$2a\beta y' + b(\alpha y' + \beta x') + 2c\alpha x' + d(\beta + y') + e(\alpha + x') + 2f = 0,$$

qui, en considérant x' et y' comme variables, représente l'équation de la droite qui passe par les points de contact. Si maintenant on suppose que le point α, β soit l'origine, cette équation se réduit à $dy + ex + 2f = 0$.

Il en résulte que le lieu de tous les points M, N, cherchés est la droite pnM, qui joint les points de contact p, n, des tangentes menées du point A, à la courbe donnée.

Passons à la solution géométrique du même problème. Nous commencerons par faire observer que si les sécantes EB, DC, au lieu de concourir en un point constant A, étaient parallèles à une direction fixe, les rencontres M et N se feraient sur la droite qui joindrait leurs milieux, et par conséquent sur le diamètre même de ces cordes. Nous allons chercher à ramener à ce cas celui où les sécantes concourent au point donné A, intérieur ou extérieur à la courbe.

Concevons à cet effet qu'on prenne la *perspective* (*) de la figure proposée sur un plan quelconque, et d'après un point de vue arbitraire; il en résultera un système de lignes disposées de la même manière dans une nouvelle courbe, qui sera encore du second degré, puisque le cône qui a son sommet au point de vue et pour base la courbe donnée, ne peut être coupé par le plan de perspective que suivant une courbe du même degré. On remarquera de plus que tous les points de rencontre des sécantes entre elles, ou avec la courbe dans l'un des systèmes, auront pour perspectives dans l'autre les points d'intersection homologues. Or, on peut placer le plan qui reçoit la perspective, parallèlement à la ligne qui joint le point A au point de vue, et alors toutes les sécantes, au lieu de passer par un même point, sont parallèles entre elles; d'où il suit que, dans ce système, tous les points homologues à M et N sont en ligne droite, et que par conséquent aussi ces derniers sont en ligne droite, puisqu'ils sont les perspectives des premiers. *Le lieu cherché est donc une ligne droite* MN.

1er Corollaire. Lorsque les sécantes AE, AD, se rapprochent

(*) C'est pour abréger le discours que nous nous servons du mot de *perspective*. Il suffira de se rappeler que la perspective d'un point sur un plan est l'intersection de ce plan avec la droite qui joint le point avec un point constant qui se nomme *le point de vue*, et que la perspective d'une ligne est le lieu des perspectives de tous ses points.

indéfiniment l'une de l'autre, les lignes MD, MC, tendent à devenir tangentes. Ce qui fait voir que *si d'un point quelconque* A *on tire des sécantes à une courbe du second degré, et que par leurs points de rencontre avec la courbe, on mène des tangentes à cette courbe, la suite des intersections deux à deux de ces tangentes sera encore la même droite* MN, *que dans le cas général que nous venons d'examiner, où l'on considérait des sécantes.*

Enfin, pour connaître la position de cette droite, MN, dans le cas où le point donné A est extérieur à la courbe, on supposera que la sécante mobile se rapproche indéfiniment d'être tangente; alors ses deux points de rencontre se rapprocheront l'un de l'autre, ainsi que le point d'intersection des deux tangentes correspondantes.

Il en résulte que *la droite, qui est le lieu de ces intersections* M, N, *passe nécessairement par les points de contact* n, p, *des tangentes menées à la courbe par le point* A.

On reconnaîtra facilement que la *droite conjuguée* d'un foyer est la *directrice* correspondante à ce foyer.

2ᵉ Corollaire. On peut conclure de là un moyen simple de *mener par un point donné* A *une tangente à une courbe du second degré, au moyen de la règle seulement.* On tire de ce point deux sécantes ABE, ACD, qui coupent la courbe en quatre points B, E, C, D; on joint ces points deux à deux par des droites qui se coupent en M et N; la droite menée par M et N coupe la courbe aux points n et p de contact demandés. De sorte que An et Ap sont les tangentes à la courbe.

Quand le point donné M (*fig.* 141) est sur la courbe, on tire une sécante quelconque MB, on prend sur elle un point C, et on construit la droite conjuguée UV du point C: cette dernière droite contient le point de rencontre des tangentes menées aux points M et B. On détermine semblablement la droite conjuguée XY d'un autre point D de MB. Le point O de rencontre des droites UV, XY, sera celui où se couperaient les tangentes aux points M et B; la droite OM sera donc la tangente cherchée.

3ᵉ Corollaire. Il suit encore du premier corollaire que si de

tous les points d'une droite extérieure à une courbe du second degré, on tire des couples de tangentes à cette courbe, et qu'on mène des droites par les points de contact des deux tangentes qui partent d'un même point, toutes ces droites passeront par un même point.

Si la droite donnée coupe la courbe, et que pour chacun de ses points on cherche la droite conjuguée qui ne sera plus une ligne de contact, toutes ces droites passeront encore par un même point.

4° Corollaire. On peut déduire de ces propriétés un moyen de *construire par points une courbe du second degré, quand on en connaît cinq points*, E, B, C, D, F, (*fig.* 140). On joindra deux à deux les quatre points E, B, C, D; on déterminera ainsi un point A et sa droite conjugée MNG. On tirera la droite indéfinie AFH et la droite DF, qui coupera MNG en P; par C et P, on mènera une droite indéfinie CK, dont l'intersection avec AH fera connaître un sixième point Q de la courbe demandée. Considérant ce point Q avec quatre des précédens, on déterminera encore un nouveau point de la courbe, et ainsi de suite.

Théorème. *Soit une courbe représentée par l'équation du degré* m, *en* x *et* y,

$$Ay^m + By^{m-1} + \ldots + Ty + U = o.$$

Le produit des ordonnées (tant réelles qu'imaginaires) correspondantes à une abscisse quelconque, est dans un rapport constant avec le produit des distances du pied de cette ordonnée aux points de rencontre (réels ou imaginaires) de la courbe avec l'axe des x.

En effet, pour une abscisse quelconque x, le produit des ordonnées sera $\frac{U}{A}$, abstraction faite du signe. Mais U est un polynome en x qui peut être mis sous la forme

$$U = K(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-l),$$

$a, b, c, \ldots, l$, étant les abscisses relatives à $y = o$. Désignant donc par P le produit des ordonnées correspondantes à l'ab-

scisse arbitraire x, on aura

$$P = \frac{K}{A}(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-l);$$

d'où $\quad$ (1) ... $\dfrac{P}{(x-a)(x-b)\ldots(x-l)} = \dfrac{K}{A}$.

Mais, $x-a$, $x-b$ ..., $x-l$, sont (abstraction faite des signes) les distances du pied de l'ordonnée aux points de l'axe des x, qui ont pour abscisses a, b, c, ..., l, de plus K et A sont des coefficiens constans. Le théorème est donc démontré.

Si le coefficient A, au lieu d'être constant, était une fonction de x, il pourrait se mettre sous la forme

$$A = A'(x-a')(x-b')\ldots(x-l'),$$

et l'équation (1) deviendrait

$$\frac{P}{\left\{\begin{matrix}(x-a)(x-b)\ldots(x-l)\\(x-a')(x-b')\ldots(x-l')\end{matrix}\right\}} = \frac{K}{A'}.$$

Les quantités $x-a'$, $x-b'$, ... $x-l'$, seraient les distances du pied de l'ordonnée aux points constans de l'axe des x, qui ont pour abscisses a', b', ..., l'.

1er Corollaire. Soient deux sécantes ABC, ADE (*fig.* 142), à une courbe quelconque du second degré, et deux autres sécantes A'B'C', A'D'E', respectivement parallèles à AC et AE; on aura

$$AB \times AC : AD \times AE :: A'B' \times A'C' : A'D' \times A'E'.$$

En effet, concevons qu'on prenne AE pour axe des x, et AC pour axe des y; prolongeons la droite C'A' jusqu'à ce qu'elle coupe AE en K; on aura, par le théorème précédent,

$$AB \times AC : AD \times AE :: KB' \times KC' : KD \times KE.$$

Mais semblablement, en considérant les deux axes KC', KE, on a

$$KB' \times KC' : KD \times KE :: A'B' \times A'C' : A'D' \times A'E'.$$

Donc enfin

$$AB \times AC : AD \times AE :: A'B' \times A'C' : A'D' \times A'E'.$$

Cette propriété a lieu quelque part que soient pris les points A et A', dans le plan de la courbe.

Si l'on prend pour l'un d'eux le point de concours des tangentes parallèles aux sécantes, le rapport constant sera celui des carrés des portions de tangentes comprises entre le point de rencontre de ces tangentes et les points de contact.

Si la courbe à un centre, et qu'on mène les sécantes par ce point, le rapport constant sera celui des carrés de ces diamètres.

2[e] Corollaire. Si par un point donné A (*fig.* 142), on tire une droite qui coupe une courbe du second degré en deux points B, C, et qu'on propose d'en tirer une seconde ADE, telle que les deux produits AB $\times$ AC, AD $\times$ AE, soient égaux, il suffira de mener la droite AE de manière à ce qu'elle forme avec un axe de la courbe le même angle que AC; car alors les tangentes parallèles se couperont sur cet axe et seront de même grandeur; le rapport de leurs carrés sera donc l'unité, et par conséquent les deux produits en question, qui ont entre eux le même rapport, seront aussi égaux.

Théorème. (*Fig.* 143). *Si d'un point quelconque d'une directrice, on mène deux tangentes à une courbe du second degré, et qu'on abaisse du même point une perpendiculaire sur la droite qui joint les points de contact, la rencontre de ces deux dernières droites aura lieu au foyer* F *de la courbe.*

En effet, tirons par le foyer F deux sécantes quelconques MP, QN, les droites NM, PQ, prolongées se rencontreront en un point S de la directrice, qui est la droite conjuguée du foyer (*pag.* 338). Joignons SF, et abaissons sur la directrice les perpendiculaires MK, NH, les triangles SFM, SNF, ayant un angle égal en S, seront entre eux comme les rectangles des côtés qui comprennent cet angle, ou comme SM est à SN; ou comme MK est à NH, ou enfin, comme FM est à FN (d'après la propriété connue de la directrice).

Les deux mêmes triangles sont donc entre eux comme les

rectangles des côtés qui comprennent leurs angles en F; donc ces angles sont égaux ou supplémens l'un de l'autre. Or, dans le cas actuel ils ne peuvent être que supplémens; la droite SF partage donc l'angle MFQ en deux parties égales.

Cela posé, si on suppose que les deux sécantes MP, NQ, se rapprochent indéfiniment l'une de l'autre, les mêmes relations auront toujours lieu; ces deux sécantes tendront à se réduire à la droite qui joindrait les points de contact des tangentes à la courbe menée par le point quelconque S de la directrice; et de plus, SF tend à devenir perpendiculaire sur cette droite, puisque l'angle MFQ devient alors égal à deux angles droits. Ce qui démontre le théorème énoncé.

Théorème. (*Fig.* 144). *Le produit des perpendiculaires abaissées des deux foyers* F, F′, *d'une courbe du second degré, sur une tangente quelconque* PP′, *à cette courbe, est égal au carré du demi-axe* b *qui ne contient pas les foyers.*

En effet, soit A le centre, et (1).... $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$, l'équation de la courbe. Les foyers F, F′, seront sur le grand axe BD $=2a$. On aura,

$$AB=AD=a,\quad AF=AF'=c,\ a^2-c^2=b^2.$$

Tirons la perpendiculaire AM à la tangente PP′, et la parallèle KAK′ à PP′, nous aurons $AP=a$ (*page* 185) et

$$\begin{aligned}FP\times FP' &= (KP-KF)(KP+KF)\\ &= \overline{KP}^2-\overline{KF}^2=\overline{AP}^2-\overline{AF}^2=a^2-c^2=b^2;\end{aligned}$$

ce qui démontre le principe énoncé.

On parvient au même résultat en prenant l'expression des perpendiculaires FP, F′P′, d'après l'équation de la tangente

$$a^2yy'+b^2xx'=a^2b^2;\quad \text{car on trouve}$$

$$FP=\frac{b^2(a^2-cx')}{\sqrt{a^4y'^2+b^4x'^2}},\quad F'P'=\frac{b^2(a^2+cx')}{\sqrt{a^4y'^2+b^4x'^2}};$$

d'où $$FP\times F'P'=\frac{b^4(a^4-c^2x'^2)}{a^4y'^2+b^4x'^2}.$$

Remplaçant $a^2y'^2$ par sa valeur $a^2b^2 - b^2x'^2$, tirée de l'équation (1) de la courbe, cette expression de $FP \times F'P'$, se réduit à b^2.

Théorème. (*Fig.* 145). *Si l'on mène deux tangentes parallèles*, BH, B'K', *dans une courbe du second degré, et qu'on les coupe par une troisième tangente quelconque* K'MK, *le produit des segmens* B'K', BK, *sera égal au carré du demi-diamètre conjugué de* BB'.

En effet, prenons B'B pour axe des x, et son conjugué pour axe des y; l'équation de l'ellipse sera (1)... $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, et l'équation de la tangente KK' au point x', y', sera

$$a^2yy' + b^2xx' = a^2b^2.$$

Si l'on y fait $x = a$, on trouve

$$y = \frac{b^2(a^2 - ax')}{a^2y'} = \text{BK}.$$

Supposant ensuite $x = -a$, on trouve

$$y = \frac{b^2(a^2 + ax')}{a^2y'} = \text{B'K'}.$$

On en déduit

$$\text{BK} \times \text{B'K'} = \frac{b^4(a^4 - a^2x'^2)}{a^4y'^2} = b^2\left(\frac{a^2b^2 - b^2x'^2}{a^2y'^2}\right) = b^2.$$

Corollaire. Si l'on mène une autre tangente quelconque H'NH, et qu'on joigne H'K, K'H, ces deux droites se rencontreront sur le prolongement du diamètre B'B. En effet, d'après le théorème précédent, on a

$$\text{BK} \times \text{B'K'} = \text{BH} \times \text{B'H'}, \text{ d'où } \text{BK} : \text{BH} :: \text{B'H'} : \text{B'K'}.$$

Il s'ensuit que les trois droites B'B, H'K, K'H, concourent en un même point.

10e Problème. *Trouver le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées d'un point donné sur toutes les tangentes menées à une courbe donnée.*

Soient, $F(x, y) = 0$ l'équation de la courbe, α et β les

coordonnées du point donné, et x', y' celles d'un point quelconque de la courbe ; la tangente en ce point aura pour équation

$$y-y'=-\frac{F'(x')}{F'(y')}(x-x'),$$

et l'on aura en même temps $F(x', y')=0$.

La perpendiculaire abaissée du point donné sera déterminée par l'équation

$$y-\beta=\frac{F'(y')}{F'(x')}(x-\alpha),$$

et on obtiendra l'équation du lieu cherché en éliminant x', y' entre ces trois équations. On pourra substituer à la première, celle que l'on obtient en la multipliant par la dernière, et qui est

$$(y-y')(y-\beta)=-(x-x')(x-\alpha);$$

équation généralement plus simple que la première.

Si l'on exécute ce calcul pour les courbes du second degré, en prenant le foyer pour le point constant, on trouvera dans le cas de l'ellipse, le cercle décrit sur son grand axe comme diamètre ; dans le cas de l'hyperbole, le cercle décrit sur son *axe réel* (*) ; et enfin pour la parabole, la tangente à l'extrémité de son axe.

Si l'on considérait un cercle, et que le point donné fût pris sur sa circonférence, le lieu serait une courbe fermée, du quatrième degré, qui passerait par les deux extrémités du diamètre mené par le point donné, et aurait en ce dernier point un *rebroussement* du premier genre, tangentiellement à ce diamètre.

11e Problème. (*Fig.* 146). *Soient* B *et* C *deux points donnés*, *et* M *un point quelconque d'une courbe* RS *donnée. On tire des droites* BN, CN, *respectivement perpendiculaires aux droites* BM, CM, *et qui se coupent en un point* N. *Il s'agit de trouver la courbe formée par les points* N, *qui correspondent aux différens points de la courbe* RS.

(*) Par *axe réel*, on entend celui des deux axes rectangulaires conjugués qui coupe la courbe.

Prenons CBX pour axe des x, et pour axe des y la perpendiculaire AY à CX, menée par le milieu A de BC. Désignons par x, y, les coordonnées de M, par x', y', celles de N, et faisons $BC = 2a$.

On aura, à cause des angles droits en C et B,

$$\overline{CM}^2 + \overline{CN}^2 = \overline{MB}^2 + \overline{BN}^2, \quad \text{d'où} \quad \overline{CM}^2 - \overline{BM}^2 = \overline{BN}^2 - \overline{CN}^2.$$

Or, ces différences sont respectivement égales à $\overline{CP}^2 - \overline{PB}^2$, et à $\overline{BQ}^2 - \overline{CQ}^2$; donc, les points P et Q sont à égales distances des extrémités B et C.

Cela posé, on aura d'abord $x = -x'$.

Ensuite, les triangles semblables CNQ, CMP, donneront

$$CQ : -y' :: y : CP, \quad \text{ou} \quad a + x' : -y' :: y : a + x;$$

et comme $x = -x'$, la dernière proportion conduira à

$$y = \frac{x'^2 - a^2}{y'}.$$

Connaissant ainsi x et y en fonction de x' et de y', on les reportera dans l'équation de la courbe que doit décrire le point M, ce qui fournira l'équation du lieu des points N.

1°. Lorsque la courbe donnée est le cercle décrit sur CB comme diamètre, on trouve, pour le lieu cherché, le même cercle; car alors on a $x^2 + y^2 = a^2$. Substituant les valeurs de x et y, en x', y', il vient

$$x'^2 + \frac{(x'^2 - a^2)^2}{y'^2} = a^2, \quad \text{ou} \quad (x'^2 - a^2)y'^2 + (x'^2 - a^2)^2 = 0.$$

Divisant par $x'^2 - a^2$, on retrouve

$$y'^2 + x'^2 - a^2 = 0.$$

2°. Quand le point M décrit une courbe quelconque du second degré, le point N en décrit généralement une du quatrième degré, qui peut, dans certains cas, se réduire au troisième ou au second, ou même au premier degré. En effet, soit

$$(1) \ldots \alpha y^2 + \beta yx + \gamma x^2 + \delta y + \varepsilon x + \theta = 0,$$

l'équation de la courbe donnée; celle du lieu cherché sera

$$\alpha(x^2-a^2)^2-\beta xy(x^2-a^2)+\gamma x^2y^2+\delta y(x^2-a^2)-\varepsilon xy^2+\theta y^2=0.$$

Cette équation est généralement du quatrième degré. Cela posé :

1°. Si $\alpha=0$, on pourra diviser tous les termes par y, et l'on aura une équation du troisième degré.

2°. Si la courbe donnée passe par les deux points donnés, il faudra qu'en y faisant $y=0$, on trouve $x=\pm a$; ce qui exige que $\varepsilon=0$ et $\theta=-\gamma a^2$. Divisant alors l'équation du lieu par x^2-a^2, elle se réduit à

$$(2)\ldots\ \alpha(x^2-a^2)-\beta xy+\gamma y^2+\delta y=0,$$

et représente une courbe du même genre que la proposée, puisque ce genre est déterminé pour chaque courbe par le signe de la même expression $\beta^2-4\alpha\gamma$.

Le lieu cherché ne pourra donc se réduire à une ou deux lignes droites, que dans le cas où la proposée sera une parabole ou une hyperbole.

Dans le premier cas, $\beta^2=4\alpha\gamma$; l'équation (2) donne

$$y=\frac{\beta x-\delta}{2\gamma}\pm\frac{1}{2\gamma}\sqrt{-2\beta\delta x+\delta^2+4\alpha\gamma a},$$

et représente deux droites parallèles.

Lorsque $\beta=0$, on a $\alpha\gamma=0$; et supposant $\alpha=0$, il vient $y=-\frac{\delta}{2\gamma}\pm\frac{\delta}{2\gamma}$; ce qui donne $y=0$ et $y=-\frac{\delta}{\gamma}$.

Comparons ces résultats avec la position de la courbe donnée. Son équation, en vertu des hypothèses $\alpha=0$, $\beta=0$, $\varepsilon=0$, $\theta=-\gamma a^2$, se réduit à

$$\gamma x^2+\delta y-\gamma a^2=0,\ \text{ou à}\ x^2+\frac{\delta}{\gamma}y-a^2=0,$$

équation qui représente une parabole dont le paramètre est

$\frac{\delta}{\gamma}$, dont l'axe est la droite AY, et dont le sommet a pour ordonnée $\frac{a^2\gamma}{\delta}$.

Or, la première équation $y=0$ du lieu cherché, représente l'axe des x; ce lieu s'obtient lorsque les deux droites mobiles qui se rencontrent sur la parabole, sont parallèles à son axe, auquel cas elles rencontrent la parabole à l'infini; leurs perpendiculaires respectives se confondent avec l'axe des x dont tous les points appartiendront au lieu cherché, puisqu'ils seront à la fois sur ces deux dernières droites. Négligeant cette solution, qui est fournie par une seule position des droites mobiles, il restera le lieu de l'équation $y=-\frac{\delta}{\gamma}$, qui est une parallèle à l'axe des x, placée, par rapport à l'origine, du côté opposé au sommet de la parabole, et à une distance de l'origine, égale au paramètre.

On pourra discuter semblablement les circonstances que présenteront les diverses hypothèses qui peuvent être faites dans le cas que nous venons de traiter, où l'on a $6^2=4\alpha\gamma$.

Lorsqu'on a $6^2-4\alpha\gamma>0$, la courbe donnée est une hyperbole, et son équation devient, d'après l'hypothèse qu'elle passe par les deux points donnés,

$$(3)\ldots\ \alpha y^2+6yx+\gamma x^2+\delta y-\gamma a^2=0.$$

Si l'on avait $\alpha=0$, l'équation (2) deviendrait

$$6xy+\gamma y^2+\delta y=0,$$

et se décomposerait en $y=0$ et $6x+\gamma y+\delta=0$.

L'équation (3) se réduit alors à

$$6yx+\gamma x^2+\delta y-\gamma a^2=0,$$

et l'hyperbole qu'elle représente, a une asymptote parallèle à l'axe des y. Les deux droites mobiles peuvent donc encore devenir parallèles à l'axe des y, sans cesser de se rencontrer sur la courbe, et leurs perpendiculaires se confondent avec l'axe

des x, qui fait alors partie du lieu, et est relatif à l'équation $y = 0$. Quant à la seconde équation, $\beta x + \gamma y + \delta = 0$, elle représente une autre droite qui correspond à toutes les positions des droites mobiles non parallèles à l'axe des y.

On pourra chercher, d'une manière générale, tous les cas où l'équation (2) se réduit à une ou deux équations du premier degré, en supposant toujours $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$.

12ᵉ Problème. (*Fig.* 147). *On donne deux droites rectangulaires* VV′, YY′, *et une longueur* $AD = 2a$; *un angle droit* DEF, *dont le côté* EF *est égal à* $2a$, *se meut de manière que son côté perpendiculaire à* EF, *passe constamment par* D, *et que le point* F *glisse sur* AV. *On demande le lieu décrit par le milieu* M *de* EF.

Soit H le milieu de AD; menons HX parallèle à AV, et prenons pour axes des x et y les droites HX, HY. Désignons par x et y les coordonnées HP, MP, du milieu M de EF; les triangles semblables MIF, KEF, donnent

$$IF : IM + MF :: EF : KE + KF,$$

ou $\sqrt{a^2 - (y-a)^2} : y :: 2a : AF$, car $KE + KF = AF$.

Or, $$AF = x + \sqrt{a^2 - (y-a)^2}.$$

Egalant les deux valeurs de AF, on trouve que l'équation du lieu cherché est

$$y^4 = x^2(2ay - y^2), \quad \text{ou} \quad y^3 = (2a - y)x^2;$$

car $y = 0$ ne peut convenir à la question.

Il est facile de reconnaître que cette courbe est symétrique par rapport à l'axe des y, qu'elle passe par l'origine, et qu'elle a une asymptote dont l'équation est $y = 2a$. Cette courbe est la *cissoïde* de *Dioclès*.

13ᵉ Problème. (*Fig.* 148). *Par quatre points* M, N, P, Q, *donnés dans un même plan, on fait passer une infinité de courbes du second degré, et dans chacune d'elles on mène le diamètre des cordes parallèles à une droite fixe ayant pour*

équation $y=nx$. *On propose de démontrer que tous ces diamètres se coupent en un même point, et de déterminer ensuite le lieu de ces points quand* n *prend toutes les valeurs possibles.*

Prenons pour axes des x et y, les deux droites AQPX, AMNY, et faisons

$$AM=\beta,\quad AN=\beta',\quad AQ=\alpha,\quad AP=\alpha'.$$

L'équation de la courbe du second degré devra être telle, qu'en y faisant $x=0$, les valeurs correspondantes de y soient β et β'; elle devra donc être de la forme

$$y^2+mxy+ax^2-(\beta+\beta')y+bx+\beta\beta'=0.$$

Mais en faisant $y=0$, on doit trouver pour x les valeurs α, α'; on a donc

$$\alpha\alpha'=\frac{\beta\beta'}{a},\ \alpha+\alpha'=-\frac{b}{a};\ \text{d'où}\ a=\frac{\beta\beta'}{\alpha\alpha'},\ b=-\frac{\beta\beta'(\alpha+\alpha')}{\alpha\alpha'}.$$

L'équation d'une courbe quelconque du second degré passant par les quatre points donnés sera donc

$$y^2+mxy+\frac{\beta\beta'}{\alpha\alpha'}x^2-(\beta+\beta')y-\frac{\beta\beta'(\alpha+\alpha')}{\alpha\alpha'}x+\beta\beta'=0,$$

m restant arbitraire.

D'après la théorie des diamètres des courbes du second degré, l'équation du diamètre des cordes parallèles à la droite $y=nx$, sera

$$m(y+nx)+2ny+\frac{2\beta\beta'}{\alpha\alpha'}x-(\beta+\beta')n-\frac{\beta\beta'}{\alpha\alpha'}(\alpha+\alpha')=0.$$

Or, on satisfera à cette équation, quel que soit m, en posant

$$(1)\ldots y+nx=0,\ 2ny+\frac{2\beta\beta'}{\alpha\alpha'}x-(\beta+\beta')n-\frac{\beta\beta'}{\alpha\alpha'}(\alpha+\alpha')=0.$$

Les valeurs de x et y tirées de ces deux équations seront les coordonnées d'un point qui appartiendra à la fois à tous les diamètres. Il est donc prouvé que tous ces diamètres passent par un même point.

Si maintenant on veut connaître le lieu des points qu'on obtiendra de la sorte, en faisant passer n par toutes les valeurs possibles, il suffira d'éliminer n entre les équations (1), ce qui donnera

$$2\mathcal{C}\mathcal{C}' x^2 - 2\alpha\alpha' y^2 + \alpha\alpha' (\mathcal{C}+\mathcal{C}') y - \mathcal{C}\mathcal{C}' (\alpha + \alpha') x = 0.$$

Il est facile de reconnaître que cette courbe passe par l'origine A ; que les droites AX, AY, sont parallèles à un de ses systèmes de diamètres conjugués, et que son centre a pour coordonnées

$$x = \frac{1}{4}(\alpha + \alpha'), \quad y = \frac{1}{4}(\mathcal{C} + \mathcal{C}').$$

Mais comme on aurait été conduit aux mêmes calculs en prenant pour axes des coordonnées les deux autres droites PNA', QMA', on en conclura que la courbe cherchée passe par le point A', et que ces deux dernières droites sont parallèles à un système de diamètres conjugués.

De plus, si on fait

$$A'N = a, \quad A'P = a', \quad A'M = b, \quad A'Q = b',$$

on verra facilement que, par rapport à ces nouveaux axes, on aurait trouvé pour les coordonnées du centre

$$x' = \frac{1}{4}(a\ i'), \quad y\ ' = \frac{1}{4}(b + b').$$

Si on construit ce point d'après le premier système d'axes, on reconnaîtra aisément, d'après les valeurs de ses coordonnées, qu'il est le milieu de la droite qui joint les milieux des côtés opposés MN, PQ. D'après le second système, ce point se trouvera au milieu de la droite qui joint les milieux des deux autres côtés NP, MQ ; ce qui prouverait, si on ne le savait pas d'avance, que dans tout quadrilatère plan, les droites qui joignent les milieux des côtés opposés se coupent en leur milieu.

Remarque. Pour une valeur donnée de n, il est facile de construire le point de rencontre de tous les diamètres des courbes du second degré correspondantes aux diverses valeurs.

de m ; car ce point est, comme nous l'avons vu, sur la droite, dont l'équation est $y+nx=0$, et on le construira en menant par l'origine A une parallèle AV à la droite donnée $y=nx$, puis d'un de ses points menant VKV′ parallèle à AY, et prenant KV′ = KV, la droite AV′ sera celle que représentera l'équation $y+nx=0$.

Faisant une construction analogue relativement au point A′ et aux deux droites A′P, A′Q, on aura une seconde droite, qui, par son intersection avec AV′, déterminera le point cherché.

Si l'on avait $\alpha'=\alpha$ et $\mathcal{C}'=\mathcal{C}$, les courbes variables seraient tangentes au deux droites AX, AY, aux points constans M, Q, et l'équation du lieu deviendrait

$$\mathcal{C}^2x^2-\alpha^2y^2+\alpha^2\mathcal{C}y-\mathcal{C}^2\alpha x=0.$$

Si les quatre points M, N, P, Q étaient sur un même cercle, on aurait $\alpha\alpha'=\mathcal{C}\mathcal{C}'$, et l'équation du lieu demandé se réduirait à

$$2x^2-2y^2+(\mathcal{C}+\mathcal{C}')y-(\alpha+\alpha')x=0.$$

14ᵉ Problème. (*Fig.* 149). *Par un point donné* B, *on mène une droite quelconque qui coupe une ellipse donnée en deux points* M *et* N; *on détermine un point* P *sur cette sécante, de manière que l'on ait* PM : PN :: BM : BN. *Il s'agit de trouver le lieu des points* P *ainsi construits.*

Soit l'équation de l'ellipse $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$.

Transportant l'origine au point B, et désignant ses coordonnées par α, $\mathcal{C}$, l'équation de l'ellipse sera

$$a^2(y+\mathcal{C})^2+b^2(x+\alpha)^2=a^2b^2,$$

et l'équation de la sécante BMN sera $y=mx$.

Les parties de la droite BN étant entre elles comme leurs projections sur AX, si l'on désigne par x, x', x'', les abcisses des points P, M, N, on aura

$$x'-x : x-x'' :: x' : x''; \quad \text{d'où} \quad (1)\ldots x=\frac{2x'x''}{x'+x''}.$$

Or, on aura l'équation qui a pour racines x' et x'', en éliminant y entre l'équation de l'ellipse et celle de la sécante; ce qui

donnera

$$(a^2m^2+b^2)x^2+2(a^2\beta m+b^2\alpha)x+a^2\beta^2+b^2\alpha^2-a^2b^2=0.$$

Mais, on sait que dans toute équation du second degré, le rapport du produit des racines à leur somme, s'obtient en divisant le dernier terme par le coefficient du second pris en signe contraire. La valeur (1) de x deviendra

$$x=\frac{a^2b^2-a^2\beta^2-b^2\alpha^2}{a^2\beta m+b^2\alpha}.$$

Remplaçant m par $\frac{y}{x}$, on aura enfin pour l'équation du lieu cherché

$$a^2\beta y+b^2\alpha x=a^2b^2-\alpha^2b^2-\beta^2a^2.$$

Ce lieu est donc une ligne droite.

Reportant l'origine au centre, l'équation du lieu devient

$$a^2\beta y+b^2\alpha x=a^2b^2,$$

équation qui représente la droite qui passe par les deux points de contact des tangentes menées à l'ellipse par le point donné B, lorsque ce point est extérieur à la courbe.

On fera le calcul de la même manière pour la parabole et l'hyperbole, et l'on parviendra à des résultats analogues.

15e Problème. (*Fig* 150). *On donne un quadrilatère quelconque* BADC; *d'un point* M, *on mène des droites* MP, MQ, MR, MS, *parallèles à des droites données et terminées respectivement aux quatre droites qui forment le quadrilatère. On demande le lieu des points* M, *tels que*

$$MR\times MQ : MP\times MS :: m : n.$$

Prenons les côtés AB, AD, pour axes des coordonnées x, y; faisons $AB=a$, $AD=h$, et désignons par α, β, les coordonnées du point C.

Nous commencerons par faire observer que si par le point M on mène MEF et GMH parallèles aux axes, le rapport de $ME\times MF$ à $MG\times MH$ sera connu puisque l'on donne celui de $MR\times MQ$ à $MP\times MS$, et que les rapports $\frac{ME}{MR}$, $\frac{MF}{MQ}$,

$\frac{MG}{MP}$, $\frac{MH}{MS}$, sont connus, comme étant égaux à des rapports de sinus d'angles donnés. Représentons le rapport des deux nouveaux produits par $\frac{m'}{n'}$.

Cela posé, l'équation de la droite BC sera

$$y-a=\left(\frac{\mathcal{C}-a}{\alpha}\right)x;$$

celle de CD sera

$$y=\left(\frac{\mathcal{C}}{\alpha-b}\right)(x-b).$$

Désignant par y' et x' les coordonnées du point M, on aura

$$MF=y',\quad MG=x';$$

et d'après les équations des droites BC, CD, on trouvera

$$ME=y'-a+\left(\frac{a-\mathcal{C}}{\alpha}\right)x',\quad HM=b-x'+\left(\frac{\alpha-b}{\mathcal{C}}\right)y'.$$

D'où l'on tirera, toute réduction faite,

$$n'\alpha y^2+m'\mathcal{C}x^2+[(a-\mathcal{C})n'+(b-\alpha)m']xy-n'a\alpha y-m'b\mathcal{C}x=0.$$

Le lieu cherché est donc une courbe du second degré. On reconnaîtra facilement qu'elle passe par les quatre points donnés A, B, C, D.

1er Corollaire. Réciproquement, toute courbe du second degré jouit de la propriété, que si l'on prend sur elle quatre points quelconques, et que d'un autre quelconque de ses points on mène quatre droites de directions constantes et terminées aux cotés du quadrilatère inscrit, le produit des deux lignes menées à deux côtés opposés sera dans un rapport constant avec celui des deux lignes menées aux deux autres côtés. En effet, si pour ce quadrilatère on résout le problème précédent d'après un rapport arbitraire $\frac{m}{n}$, on obtiendra une courbe du second degré qui passera nécessairement par les quatre sommets

du quadrilatère. Supposant ensuite $\frac{m}{n}$, égal au rapport que fourniraient les produits des droites menées d'un point de la courbe donnée aux quatre côtés de ce quadrilatère, le lieu dont nous venons de parler passera par ce cinquième point de la courbe, et par conséquent coïncidera avec elle. Celle-ci jouit donc de la propriété annoncée, que le rapport indiqué est constant pour tous ses points.

2[e] Corollaire. Cette relation ayant lieu, quelque petits que soient les côtés du quadrilatère, aura encore lieu quand deux côtés opposés deviendront nuls. Dans ce cas, leurs directions seront tangentes à la courbe, et les deux autres côtés se confondront avec la droite qui joint les points de contact.

Si, dans ce même cas, on suppose que les droites menées par les divers points de la courbe soient toutes parallèles à une même droite, il en résultera que pour tous les points P de la courbe (*fig.* 151), le rapport de $\overline{PQ}^2$ à PR $\times$ PS sera constant.

Transformation particulière des lieux géométriques.

La transformation dont nous allons nous occuper est tirée du livre des Principes de Newton. Son but est de changer des figures en d'autres plus commodes à traiter, et telles que l'on puisse facilement repasser des résultats qu'elles fourniront à ceux qui conviennent aux données primitives.

Si l'on désigne par x et y les coordonnées d'un point du premier système, et par x', y', celles du correspondant du système transformé, les relations au moyen desquelles on lie ces deux points sont, en désignant par m et n deux constantes arbitraires,

$$x' = \frac{ny}{x}, \; y' = \frac{mn}{x}; \text{ d'où } \; x = \frac{mn}{y'}, \quad y = \frac{mx'}{y'}.$$

D'après cela, soit une équation quelconque

$$F(x, y) = 0.$$

L'équation de la courbe transformée sera

$$F\left(\frac{mn}{y'}, \frac{mx'}{y'}\right) = 0;$$

et si l'on désigne par $\varphi(x', y') = 0$, une équation quelconque du second système, la correspondante du premier sera

$$\varphi\left(\frac{ny}{x}, \frac{mn}{x}\right) = 0.$$

On remarquera d'abord que les points d'intersection de deux lignes de l'un des systèmes ont pour correspondans dans le second les points de rencontre des lignes correspondantes. Il suit de là que si deux points d'intersection se confondent dans l'un des systèmes, les correspondans se confondront dans l'autre ; de sorte que deux lignes tangentes l'une à l'autre en un point auront pour correspondantes des lignes tangentes au point homologue.

On observera de plus que le degré des équations ne sera point altéré par cette transformation. Car soit une équation du degré $\alpha + \zeta$,

$$Ax^{\alpha}y^{\zeta} + \ldots\ldots + V = 0.$$

La substitution des valeurs précédentes de x et y donnera une équation dont tous les termes seront de dimensions nulles ou négatives. Multipliant par $y'^{\alpha + \zeta}$, tous les dénominateurs disparaîtront, et il en résultera une équation du degré $\alpha + \zeta$ en x' et y'.

Par cette transformation, on peut changer un système de droites qui concourent en un même point, en un système de droites parallèles. Prenons l'axe des y passant par leur point de concours, l'équation générale de ces droites sera $y = ax + b$, b étant constant. Transformant, il vient

$$\frac{mx'}{y'} = \frac{amn}{y'} + b \quad \text{ou} \quad mx' = amn + by',$$

équation qui, quand on fait varier a, représente des droites parallèles, puisque m et b sont constans.

Appliquons cette considération à la solution du problème du

n° 9 (*page* 335) ; soit M (*fig.* 152) le point par lequel on mène les sécantes ; prenons pour axe des y le diamètre mené par ce point, et pour axe des x une parallèle à ses cordes menée par le même point, l'équation de la courbe donnée sera de la forme $$y^2+ax^2+by+c=0.$$

Celle d'une sécante quelconque menée par l'origine sera $y=px$. Tranformant ces deux équations, elles deviennent

$$cy'^2+bmx'y'+m^2x'^2+am^2n^2=0, \quad x'=pn.$$

Or, toutes les sécantes étant alors parallèles à l'axe des y, puisque leur équation générale est $x'=pn$, le lieu cherché sera le diamètre même de ces cordes, et aura pour équation

$$2cy'+bmx'=0.$$

Pour avoir l'équation correspondante dans le système proposé, remplaçons x' et y' par $\frac{ny}{x}$ et $\frac{mn}{x}$, nous aurons pour l'équation du lieu cherché

$$\frac{2cmn}{x}+\frac{bmny}{x}=0, \quad \text{ou } y=-\frac{2c}{b};$$

cette équation représente une parallèle à l'axe des x, et par conséquent au conjugué du diamètre mené par le point donné M.

Lorsque le point M est extérieur, il est facile de voir que cette droite est celle qui joindrait les deux points de contact des tangentes menées par le point M à la courbe donnée. Car l'équation générale d'une tangente au point α, β, de la courbe est

$$2\beta y+2a\alpha x+b(y+\beta)+2c=0,$$

et pour qu'elle passe par l'origine il faut que $b\beta+2c=0$; ce qui montre que les deux points de contact sont sur la droite dont l'équation est $by+2c=0$.

On pourra appliquer avec avantage ce genre de transformation à un grand nombre de problèmes.

APPLICATION DE L'ALGÈBRE

AUX LIEUX DANS L'ESPACE.

1er Problème. *Trouver l'équation générale des surfaces coniques.*

Une surface conique est celle qu'engendre une droite indéfinie qui passe par un point fixe nommé *centre*, et s'appuie constamment sur une courbe donnée, nommée *directrice.*

Soient α, 6, γ, les coordonnées du *centre* du cône, et

$$F(x, y, z) = 0, \quad F_1(x, y, z) = 0,$$

les équations de la *directrice;* les équations d'une *génératrice* quelconque, seront de la forme

$$x - \alpha = m(z - \gamma), \quad y - 6 = n(z - \gamma).$$

Pour exprimer qu'elle rencontre la courbe donnée, on éliminera x, y, z, entre ses deux équations et celles de la courbe, et il en résultera une équation de condition entre m, n, que je représente par

$$\varphi(m, n) = 0.$$

Reportant dans cette dernière, au lieu de m et n, leurs valeurs tirées des équations de la droite, on aura pour l'équation du lieu cherché

$$(1) \ldots \varphi\left(\frac{x - \alpha}{z - \gamma}, \frac{y - 6}{z - \gamma}\right) = 0.$$

Réciproquement, quelle que soit la forme de la fonction φ, l'équation (1) est celle d'une surface conique dont le centre a

pour coordonnées $\alpha, \mathcal{C}, \gamma$. Car soient x', y', z', les coordonnées d'un quelconque des points de la surface (1), on aura

$$\varphi\left(\frac{x'-\alpha}{z'-\gamma}, \frac{y'-\mathcal{C}}{z'-\gamma}\right)=0,$$

et il est visible que cette équation sera toujours satisfaite, si l'on fait varier x', y', z', de manière que $\frac{x'-\alpha}{z'-\gamma}$ et $\frac{y'-\mathcal{C}}{z'-\gamma}$ soient constans; ce qui montre que tous les points de la droite ayant pour équations

$$\frac{x-\alpha}{z-\gamma}=k, \quad \frac{y-\mathcal{C}}{z-\gamma}=k',$$

sont sur cette surface, k et k' étant deux constantes. Cette surface peut donc être engendrée par une droite qui passe par le point constant $\alpha, \mathcal{C}, \gamma$; elle est donc une surface conique.

2e Problème. *Trouver l'équation générale des surfaces cylindriques.*

On nomme ainsi toute surface engendrée par une droite qui se meut parallèlement à une droite fixe, en s'appuyant toujours sur une courbe donnée, nommée *directrice.*

Soient, $x=az, y=bz$, les équations de la droite à laquelle les génératrices de la surface sont constamment parallèles, et soient

$$F(x, y, z)=0, \quad F_1(x, y, z)=0,$$

les équations de la directrice donnée.

Les équations d'une génératrice quelconque seront

$$x=az+\alpha, \quad y=bz+\mathcal{C},$$

α et $\mathcal{C}$ étant deux quantités qui restent constantes pour tous les points d'une même génératrice, et qui varient en passant d'une génératrice à l'autre. Eliminant x, y, z, entre les équations de cette droite et celles de la directrice, on aura entre α et $\mathcal{C}$ une équation

$$\varphi(\alpha, \mathcal{C})=0,$$

qui exprimera que la droite mobile rencontre toujours la courbe donnée; et si l'on y reporte au lieu de α et $\mathfrak{C}$ leurs valeurs tirées des équations (2) de cette droite, on aura pour l'équation du lieu cherché

$$(2)\ldots \varphi(x-az,\ y-bz)=0.$$

On démontrera, comme dans le problème précédent, que réciproquement, quelle que soit la forme de la fonction φ, l'équation représente une surface cylindrique dont les génératrices sont parallèles à la droite, ayant pour équations]

$$x=az,\ y=bz.$$

3e PROBLÈME. *Trouver l'équation générale des surfaces conoïdes*. On nomme ainsi toute surface engendrée par une droite qui se meut parallèlement à un plan fixe, en s'appuyant constamment sur une droite et sur une courbe données.

Prenons le plan donné pour celui des coordonnées x, y, et la droite donnée pour axe des z. Soient

$$(1)\ldots F(x, y, z)=0,\quad F_1(x, y, z)=0,$$

les équations de la courbe *directrice*, celles de la *génératrice* seront de la forme

$$(2)\ldots z=\alpha,\quad y=mx,$$

puisqu'elle doit être parallèle au plan xy, et rencontrer l'axe des z.

On exprimera que la génératrice rencontre la directrice, en éliminant x, y, z, entre les équations (1), (2), et il en résultera une équation de condition $\varphi(\alpha, m)=0$, qui donnera l'équation du lieu cherché, en y remettant pour α et m leurs valeurs tirées des équations (2) de la génératrice. On trouvera ainsi que l'équation de ce lieu est

$$\varphi\left(z, \frac{y}{x}\right)=0.$$

On reconnaîtra facilement, comme dans les deux problèmes

précédens, que cette équation représente toujours une surface conoïde, quelle que soit la forme de la fonction φ.

4e PROBLÈME. *Trouver l'équation générale des surfaces de révolution, c'est-à-dire, engendrées par une courbe quelconque dont tous les points décrivent des cercles ayant leurs plans perpendiculaires sur un axe fixe, et leurs centres sur cet axe.*

Soient, $x=az+\alpha,\ \ y=bz+\mathcal{C},$

les équations de l'axe de révolution, et

$$F(x,y,z)=0,\quad F_1(x,y,z)=0,$$

celles de la génératrice. Cette surface peut être considérée comme le lieu des cercles que décriront autour de l'axe les différens points de la génératrice. Pour avoir l'équation d'un quelconque de ces cercles, nous considérerons une sphère d'un rayon variable, ayant son centre sur l'axe, et coupée par un plan perpendiculaire à l'axe mené par le point où cette sphère coupe la génératrice; le cercle d'intersection de ce plan et de la sphère, sera celui que décrira le point où la sphère a rencontré la génératrice; ce sera donc un quelconque des cercles en question. Supposant le centre de la sphère au point où l'axe rencontre le plan xy, l'équation de la sphère sera

$$z^2+(y-\mathcal{C})^2+(x-\alpha)^2=R^2,$$

celle d'un plan perpendiculaire à l'axe sera

$$z+ax+by-c=0.$$

Pour exprimer que le cercle, déterminé par ces deux équations, rencontre la génératrice, on éliminera x, y, z, entre les équations de ces deux lignes, il en résultera une équation $\varphi(c,R^2)=0$, entre c et R^2.

On obtiendra l'équation du lieu cherché en reportant dans $\varphi(c,R^2)=0$, les valeurs de c et R^2, tirées des équations du cercle; on trouvera de cette manière, que l'équation générale des surfaces de révolution, est

$$\varphi\{(z+ax+by),\ [(x-\alpha)^2+(y-\mathcal{C})^2+z^2]\}=0.$$

La réciproque se démontrera aussi facilement que dans les problèmes précédens.

5° Problème. *Trouver l'équation de la surface engendrée par une droite qui s'appuie constamment sur trois droites fixes.*

Prenons des axes de coordonnées parallèles aux trois droites données; ces dernières auront respectivement pour équations

$$(1)\ldots \left\{\begin{matrix} x=a \\ y=b \end{matrix}\right\},\quad (2)\ldots \left\{\begin{matrix} x=c \\ z=d \end{matrix}\right\},\quad (3)\ldots \left\{\begin{matrix} y=e \\ z=f \end{matrix}\right\}.$$

Les équations d'une génératrice quelconque seront

$$(4)\ldots\ x=mz+m',\quad (5)\ldots y=nz+n',\quad (6)\ldots y=px+p'.$$

L'équation (6) se déduit de (4) et (5), et p est égal à $\frac{n}{m}$.

On aura les conditions pour que cette droite coupe chacune des trois premières, en éliminant x, y, z, d'abord entre les équations (1) et (6), puis entre (2) et (4), et enfin entre (3) et (5); d'où résulteront les trois équations

$$(7)\ldots\ b=pa+p',\quad c=md+m',\quad e=nf+n'.$$

On trouvera l'équation de la surface demandée, en éliminant m, m', n, n', p, p', entre les équations (7), et celles de la génératrice. On obtient d'abord immédiatement par la soustraction

$$x-c=m(z-d),\quad y-e=n(z-f),\quad y-b=p(x-a).$$

Remplaçant p par $\frac{n}{m}$, et éliminant m et n, entre les trois dernières équations, il vient

$$(z-d)(y-e)(x-a)=(z-f)(y-b)(x-c).$$

Cette dernière équation se réduit au second degré, parce que le terme xyz disparaît des deux membres; elle représente un *hyperboloïde à une nappe.*

Il est évident que si l'on change d en f, e en b, a en c, et réciproquement, l'équation finale ne change pas; d'où il suit

que la même surface peut encore être engendrée par une droite qui s'appuierait sur trois nouvelles droites ayant respectivement pour équations

$$\left\{\begin{matrix} x=c \\ y=e \end{matrix}\right\}, \quad \left\{\begin{matrix} x=a \\ z=f \end{matrix}\right\}, \quad \left\{\begin{matrix} y=b \\ z=d \end{matrix}\right\}.$$

On peut remarquer qu'une génératrice quelconque de l'un des systèmes est rencontrée par toutes celles de l'autre ; car ces dernières donnant tous les points de la surface, doivent donner successivement tous ceux de la génératrice, considérée dans le premier système. D'où il résulte que si l'on fixe trois génératrices quelconques dans l'un des deux systèmes, la surface sera engendrée par une droite qui s'appuierait sur ces trois lignes fixes.

On peut voir *à priori* que le problème sera impossible lorsque deux des droites étant dans un même plan, la troisième sera parallèle à ce plan.

6ᵉ Problème. *On donne deux points* B, B′ (*fig.* 154) *dans l'espace ; on mène deux droites quelconques passant par chacun de ces points, et assujetties à se couper constamment en un point* M *d'une surface donnée ; par les deux points donnés on mène à ces droites des perpendiculaires dans leur plan. Il s'agit de trouver le lieu des points d'intersection* M′ *de ces perpendiculaires.*

Soit $\varphi(x, y, z)=0$, la surface donnée.

Soit $BB'=2a$ la distance des deux points ; nous aurons $AP=x$, $AP'=-x'$. Donc, $x=-x'$. Abaissant les coordonnées MQ, M′Q′, QP, Q′P′, on aura

$$M'P' : MP :: M'Q' : MQ :: P'Q' : PQ,$$

ou
$$M'P' : MP :: z' : -z :: -y' : y.$$

Mais les triangles M′BP′, MBP, sont semblables, puisque l'angle M′BM est droit ; donc

$$MP : P'B :: PB : M'P', \quad \text{ou} \quad MP : a-x' :: a+x' : M'P';$$

d'où
$$MP=\frac{a^2-x'^2}{M'P'}, \quad \frac{MP}{M'P'}=\frac{a^2-x'^2}{M'P'^2}=\frac{a^2-x'^2}{y'^2+z'^2}.$$

Nous aurons donc, $-\frac{z}{z'}=\frac{a^2-x'^2}{z'^2+y'^2}=\frac{-y}{y'}$.

Par conséquent, pour un point quelconque de la surface, les équations suivantes exprimeront les coordonnées du point M, au moyen du point correspondant M',

$$x=-x',\quad y=\frac{y'(x'^2-a^2)}{z'^2+y'^2},\quad z=\frac{z'(x'^2-a^2)}{z'^2+y'^2}.$$

Si donc nous substituons ces valeurs dans l'équation donnée $\varphi(x, y, z)=0$, nous aurons l'équation cherchée.

7° Problème. *Deux plans sont assujettis à passer chacun par une droite fixe, on les fait mouvoir de manière qu'ils restent constamment perpendiculaires entre eux. On demande le lieu des intersections successives, deux à deux, de ces plans.*

Je prends la plus courte distance des droites pour axe des z, et son milieu pour origine; j'appelle $2a$ cette distance; je mène par l'origine des parallèles aux deux droites, et je prends pour axes des x et y les lignes qui partagent en deux parties égales leurs angles adjacens; si j'appelle m la tangente du demi-angle des deux droites, les équations des deux droites fixes seront

$$(1)\ldots\begin{Bmatrix}y=mx\\ z=a\end{Bmatrix}\quad\text{et}\quad\begin{Bmatrix}y=-mx\\ z=-a\end{Bmatrix};$$

les deux plans auront pour équations

$$(2)\ldots Ax+By+Cz+D=0,\quad (3)\ldots A'x+B'y+C'z+D'=0.$$

Pour que le plan (2) renferme la droite (1), il faut que l'équation $(A+Bm)x+Ca+D=0$, soit satisfaite quel que soit x; donc,

$$A+Bm=0,\quad Ca+D=0.$$

Pour le plan (2) on aura

$$(A'-B'm)x+(D'-C'a)=0,\quad A'-B'm=0;\quad D'-C'a=0.$$

Or, $A=-\frac{By+Cz+D}{x}=-Bm$, d'où $B(y-mx)+Cz+D=o$.

Mais, $C=-\frac{D}{a}$; donc $B(y-mx)-\frac{D}{a}z+D=o$.

On en déduit, $B=\frac{D(z-a)}{a(y-mx)}$.

De même,

$$A'=-\frac{B'y+C'z+D'}{x}=B'm,\quad B'(y+mx)+C'z+D'=o.$$

Or, $C'=\frac{D'}{a}$, donc $B'(y+mx)+\frac{D'z}{a}+D'=o$.

D'où $$B'=-\frac{D'(z+a)}{a(y+mx)}.$$

Donc, $$B\times B'=DD'\times\frac{(a^2-z^2)}{a^2(y^2-m^2x^2)}.$$

Or, $$A=-Bm,\quad A'=B'm;$$

donc, $$A\times A'=-BB'm^2=\frac{-DD'(a^2-z^2)m^2}{a^2(y^2-m^2x^2)}.$$

Mais, $C=-\frac{D}{a}$, $C'=\frac{D'}{a}$, donc $CC'=-\frac{DD'}{a^2}$.

Les plans (2), (3), étant perpendiculaires entre eux, on a

$$AA'+BB'+CC'=o:$$

Substituant les valeurs de AA', BB', CC', on trouve, toutes réductions faites, que la surface cherchée a pour équation

$$(z^2-a^2)(m^2-1)=y^2-m^2x^2.$$

8ᵉ Problème. *Trouver le lieu des points qui sont à égale distance de deux droites données dans l'espace.*

Je prends les mêmes coordonnées que dans le problème précédent : les équations des droites seront

$$y=mx,\quad z=a,\quad \text{et}\quad y=-mx,\quad z=-a.$$

Soient x', y', z', les coordonnées d'un point qui satisfait à la question; pour avoir sa distance à la première droite, j'abaisse par ce point un plan perpendiculaire à cette droite; l'équation de ce plan sera $x+my+D=0$, et j'aurai la condition $x'+my'+D=0$. Les coordonnées de l'intersection de ce plan avec la droite, sont

$$z=a, \quad x=\frac{-D}{1+m^2}, \quad y=\frac{-Dm}{1+m^2}.$$

Donc la distance δ du point x', y', z', à la première droite sera

$$(z'-a)^2+\left(x'+\frac{D}{1+m^2}\right)^2+\left(y'+\frac{Dm}{1+m^2}\right)^2.$$

De même pour le plan perpendiculaire à la seconde, j'aurai

$$x-my+D'=0, \quad \text{et} \quad x'-my'+D'=0,$$

et pour les coordonnées d'intersection de ce plan avec la seconde droite

$$z=-a, \quad x=-\frac{D'}{1+m^2}, \quad y=\frac{D'm}{1+m^2}.$$

La distance δ' du point x', y', z', à la seconde droite sera

$$(z'+a)^2+\left(y'-\frac{D'm}{1+m^2}\right)^2+\left(x'+\frac{D'}{1+m^2}\right)^2.$$

Egalant ces valeurs de δ et δ', réduisant et observant que

$$D=-(x'+my'), \quad D'=my'-x',$$

on trouve que l'équation du lieu cherché est

$$mxy+a(m^2+1)z=0.$$

Si l'on fait $z=0$, on a $xy=0$; ce qui donne les deux axes des x, y, comme on pouvait facilement le prévoir.]

Supposant $z=\alpha$, on a

$$mxy+a\alpha(1+m^2)=0;$$

ce qui détermine une hyperbole rapportée à ses asymptotes.

Si $a=0$, les droites se coupent, et on a $xy=0$. Ce qui donne les droites qui partagent en deux parties égales les angles adjacens des droites données.

En coupant par un plan perpendiculaire à l'axe des x, c'est-à-dire en faisant $x=\mathcal{C}$, on trouve $y=-z\frac{a(1+m^2)}{m\mathcal{C}}$. Ce qui donne une droite qui coupe l'axe des x, et lui est perpendiculaire.

Faisant ensuite $y=\alpha$, c'est-à-dire coupant la surface par un plan perpendiculaire à l'axe des y, on trouve

$$x=-z\frac{a(1+m^2)}{m\alpha}.$$

La surface peut donc être engendrée par une droite qui se meut perpendiculairement à l'axe des x ou à l'axe des y.

Si l'on élimine x et y entre les quatre équations

$$\left.\begin{array}{l} x=\mathcal{C}, \\ y=-z\frac{a(1+m^2)}{m\mathcal{C}} \end{array}\right\} \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} y=\alpha, \\ x=-z\frac{a(1+m^2)}{m\alpha}, \end{array}\right.$$

qui représentent deux génératrices quelconques prises respectivement dans ces deux systèmes, on trouve les deux équations identiques

$$m\alpha\mathcal{C}=-az(1+m^2), \quad m\alpha\mathcal{C}=-az(1+m^2).$$

Ce qui fait voir que, quels que soient α et $\mathcal{C}$, les deux droites se coupent.

Il suit de là qu'une génératrice quelconque de l'un des systèmes coupe toutes celles de l'autre, et que par conséquent si l'on en fixe une de celles qui sont perpendiculaires à l'axe des y, la surface pourra être engendrée par une droite qui s'appuiera sur cette directrice et sur l'axe des x auquel elle restera perpendiculaire.

On aurait une seconde génération semblable par une droite perpendiculaire à l'axe des y. Cette surface est un *paraboloïde hyperbolique*.

9ᵉ Problème. *On donne une courbe quelconque dans l'espace; d'un point fixe on mène des droites à chacun de ses points, et on les prolonge d'une quantité constante ou proportionnelle à elles-mêmes. On demande le lieu des extrémités de ces prolongemens.*

Dans le second cas, on voit facilement par la définition même, que c'est une courbe semblable à la première; et si l'on représente par m le rapport des rayons vecteurs, on aura l'équation du lieu cherché, en substituant à x, y, z, les valeurs $\frac{x}{m}, \frac{y}{m}, \frac{z}{m}$, dans les équations de la courbe donnée, en supposant l'origine placée au point donné.

Prenons maintenant le premier cas, et soit c la quantité constante dont on prolonge les rayons. Soit l'origine A au point fixe. Nous allons prendre un point quelconque M' de l'espace, joindre AM'', prolonger de $M'M'' = c$, et exprimer x', y', z' au moyen de x'', y'', z'', puis nous les substituerons dans l'équation de la courbe donnée.

On a $\quad M'M''\cos\alpha = P'P'' = x'' - x' = c\cos\alpha.$

Or,

$$\cos\alpha = \frac{x''}{\sqrt{x''^2+y''^2+z''^2}}; \text{ donc } x' = x''\left(1 - \frac{c}{\sqrt{x''^2+y''^2+z''^2}}\right).$$

De même,

$$y' = y''\left(1 - \frac{c}{\sqrt{x''^2+y''^2+z''^2}}\right), \quad z' = z''\left(1 - \frac{c}{\sqrt{x''^2+y''^2+z''^2}}\right).$$

Soient $F(x,y,z) = 0$, $\varphi(x,y,z) = 0$, les équations de la courbe donnée; en y substituant les valeurs précédentes, on obtiendra les équations de la courbe cherchée.

10ᵉ Problème *Du foyer d'une ellipse ayant pour axes* 2a *et* 2b, *on abaisse des perpendiculaires sur toutes ses tangentes; on suppose qu'à chaque fois l'ellipse tourne autour de la tangente comme charnière, jusqu'à ce que les deux plans fassent un*

angle donné φ. On demande l'équation de la courbe qui est le lieu des diverses positions que prendra le foyer.

Soit P (*fig.* 156) la rencontre d'une des tangentes avec sa perpendiculaire, et PM la position que prend PF ; on demande de déterminer les surfaces qui, par leur intersection, donneront le lieu des points M. L'angle FPM $= \varphi$: si au point F j'élève une perpendiculaire du plan, et que je la prenne pour axe des z, l'angle MFz sera complément de PFm, et par conséquent égal à $\frac{1}{2}\varphi$. Donc, la courbe se trouve sur une surface conique ayant son centre en F, et dont l'angle au centre est φ. Faisant $\tang \frac{1}{2}\varphi = m$, ce cône aura pour équation

$$x^2 + y^2 = m^2z^2. \quad \text{Or,} \quad PQ = PM \times \cos\varphi = PF \times \cos\varphi.$$

et par suite, $\quad FQ = FP \times (1 - \cos\varphi)$.

Or, PA $= a$. Donc, en menant QK parallèle à PA, on aura QK $= a\,(1 - \cos\varphi)$, et FK $= c\,(1 - \cos\varphi)$.

Donc K est constant, ainsi que QK. Donc les pieds Q des perpendiculaires sont sur un cercle ayant son centre en K, et pour rayon $a\,(1 - \cos\varphi)$. L'équation de ce cercle sera

$$x^2 + y^2 - 2cx(1 - \cos\varphi) = b^2\,(1 - \cos\varphi)^2.$$

Mais le lieu des points Q est la projection de la courbe. On connaît donc une surface cylindrique qui la renferme. Elle est donc déterminée ; les équations des deux surfaces qui la contiennent sont :

$$x^2 + y^2 = m^2z^2, \quad x^2 + y^2 - 2cx\,(1 - \cos\varphi) = b^2(1 - \cos\varphi)^2.$$

Toute combinaison de ces équations doit être satisfaite. Substituant à $x^2 + y^2$, sa valeur dans la seconde, on a

$$m^2z^2 - 2cx\,(1 - \cos\varphi) = b^2\,(1 - \cos\varphi)^2.$$

Ce qui donne la projection sur le plan zx, qui est une parabole.

Il est évident que si l'angle des plans est de 200°, le lieu

sera une circonférence décrite du second foyer comme centre avec le rayon $2a$. Alors l'équation $x^2+y^2=m^2z^2$ qui peut se mettre sous la forme $z^2=\frac{x^2+y^2}{m^2}$, devient $z=0$, puisque $m=\text{tang}\ 100^\circ=\infty$; ce qui fait voir que les points sont dans le plan de l'ellipse; $\cos\varphi$ devient -1, et l'équation

$$x^2+y^2-2cx(1-\cos\varphi)=b^2(1-\cos\varphi)^2,$$

devient

$$x^2+y^2-4cx=4b^2.$$

Ajoutant $4c^2$, on a

$$y^2+(x-2c)^2=4b^2+4c^2=4a^2.$$

Donc, on obtient alors la circonférence décrite de l'autre foyer comme centre avec $2a$ pour rayon, puisque l'abscisse de son centre est $2c$.

Passons au cas de la parabole, pour laquelle il est remarquable que la courbe est toujours plane. La courbe se trouve encore sur le cône ayant pour équation

$x^2+y^2=m^2z^2$. De plus, on a (*fig.* 155) $FQ:FP::1-\cos\varphi:1$.

Donc, le lieu cherché est dans un plan perpendiculaire à AX, que l'on obtiendra en partageant AF en deux parties telles, que

$$FN : AF :: 1-\cos\varphi : 1.$$

Supposons que le point M correspondant à Q, se soit rabattu sur le plan XY, en tournant autour de NY'; on aura sa position en élevant en Q une perpendiculaire à NY', égale à QM.

Or, le triangle rectangle QNF donne

$$\overline{QN}^2+\overline{NF}^2=QF^2,\quad \text{ou}\quad y^2+\frac{p^2}{4}(1-\cos\varphi)^2=m^2z^2,$$

hyperbole rapportée à ses axes; l'angle des asymptotes avec l'axe est $\frac{1}{2}\varphi$, puisque sa tangente est m. C'est aussi ce qu'on trou-

verait par la section du cône et du plan $x = -\frac{1}{2}p(1 - \cos\varphi)$.

Si l'angle $\varphi = 100°$, les points sont sur le plan qui passe par AY, perpendiculaire au plan xy. Alors le z d'un point M, est égal au rayon vecteur FP. Or, $\overline{FP}^2 - \overline{PA}^2 = \frac{1}{4}p^2$; donc, l'équation de la courbe sera $z^2 - y^2 = \frac{1}{4}p^2$.

Les équations générales conduisent au même résultat : la première donne $z = 0$; la seconde donne $y^2 + \frac{1}{4}p^2 = z^2$, puisque $\cos\varphi = 0$, et $m = 1$.

Les résultats pour l'hyperbole seraient analogues à ceux de l'ellipse.

Il reste à chercher les mêmes choses pour une courbe plane quelconque, $\varphi(x, y) = 0$.

Tous les points se trouveront encore sur le cône, ayant pour équation, $x^2 + y^2 = m^2z^2$.

Soient $\alpha, 6$, les coordonnées du point de contact; l'équation de la tangente sera

$$(y - 6)\varphi'(6) + (x - \alpha)\varphi'(\alpha) = 0,$$

et l'on aura

$$\varphi(\alpha, 6) = 0.$$

L'équation de la perpendiculaire sera

$$y\varphi'(\alpha) - x\varphi'(6) = 0.$$

Au moyen des deux équations des droites, on déterminerait x' et y', coordonnées du point P (*fig.* 156).

Or, $\quad FQ : FP :: 1 - \cos\varphi : 1;$

donc, $\quad x'' : x' :: 1 - \cos\varphi : 1 :: y'' : y';$

on a donc

$$x' = \frac{x''}{1 - \cos\varphi} \quad \text{et} \quad y' = \frac{y''}{1 - \cos\varphi}.$$

Substituant dans les valeurs de x' et y', tirées des équations

des perpendiculaires, on aura deux équations entre $\alpha, \mathit{6}, x'', y''$, et de plus $\varphi(\alpha, \mathit{6}) = 0$. Éliminant α, $\mathit{6}$, au moyen de deux d'entre elles, on obtiendra une équation entre x'' et y'', qui sera l'équation du lieu des points Q, et donnera par conséquent le cylindre projetant la courbe. Cette courbe sera donc déterminée.

11ᵉ Problème. (*Fig.* 157). *On donne trois plans situés d'une manière quelconque dans l'espace ; déterminer le lieu géométrique des points* M, *tels, qu'en abaissant des perpendiculaires sur les trois plans, la somme de leurs carrés soit égale à une surface donnée* p^2.

Les plans donnés formeront en général par leur concours un angle trièdre dont nous prendrons le sommet A pour origine, et les arêtes AX, AY, AZ pour axes des coordonnées. Soient aussi MP, MQ, MR, les perpendiculaires abaissées sur les faces de l'angle solide A ; on doit avoir

$$(1) \ldots \overline{MP}^2 + \overline{MQ}^2 + \overline{MR}^2 = p^2.$$

Menons par le point M, qui est supposé appartenir au lieu demandé, la parallèle MN à l'axe AZ, elle représentera le z du point M ; et si l'on désigne par α l'angle connu MNP, qui est égal à l'angle que l'axe AZ fait avec le plan XY, on aura évidemment

$$MP = z \sin \alpha.$$

On trouvera de même, au moyen de considérations semblables,

$$MQ = x \sin \gamma, \quad MR = y \sin \mathit{6},$$

$\mathit{6}$ et γ exprimant les angles que les axes AY, AX, font avec les plans ZX, ZY.

Portant ces valeurs dans l'équation (1), elle devient

$$z^2 \sin^2 \alpha + y^2 \sin^2 \mathit{6} + x^2 \sin^2 \gamma = p^2.$$

Le lieu géométrique cherché est donc une *ellipsoïde*, quels que soient les angles $\alpha, \mathit{6}, \gamma$.

Quand les angles α et $\mathit{6}$ sont tous deux droits, l'équation de l'ellipsoïde se change en

$$z^2 + y^2 + x^2 \sin^2 \gamma = p^2.$$

La forme de cette équation fait voir que si l'on y fait x égal à une constante quelconque, c'est-à-dire que si l'on coupe la surface par une suite de plans parallèles à zy, toutes les intersections réelles seront des cercles, puisque l'axe AX est perpendiculaire à ZY, et que l'angle ZAY est droit. Il suit de là que, dans ce cas, le lieu géométrique devient un ellipsoïde de révolution.

Lorsque les angles α, 6, γ sont droits, le lieu géométrique est une sphère.

12ᵉ Problème. *Trouver la courbe de contact d'une surface du second degré, et d'un cône dont le centre est donné.*

Cette courbe est évidemment le lieu des points de la surface donnée pour lesquels le plan tangent passe par le point donné. Soient α, 6, γ les coordonnées de ce point, l'équation de la surface proposée sera de la forme

$$az^2+a'y^2+a''x^2+bzy+b'zx+b''xy+cz+c'y+c''x+d=0;$$

et celle du plan tangent au point ayant pour coordonnées x', y', z', sera

$$2azz'+2a'yy'+2a''xx'+b(zy'+z'y)+b'(zx'+z'x)$$
$$+b''(xy'+yx')+c(z+z')+c'(y+y')+c''(x+x')+2d=0.$$

On exprimera que ce plan passe par le point donné, en remplaçant dans son équation x, y, z par α, 6, γ, ce qui donnera

$$2a\gamma z'+2a'6y'+2a''\alpha x'+b(\gamma y'+z'6)+b'(\gamma x'+z'\alpha)$$
$$+b''(\alpha y'+6x')+c(\gamma+z')+c'(6+y')+c''(\alpha+x')+2d=0.$$

Cette équation étant du premier degré, par rapport à x, y, z, considérées comme variables, représente un plan; ce qui fait voir que la courbe de contact est plane, et s'obtiendra par l'intersection de la surface donnée par le plan dont nous venons de trouver l'équation.

Connaissant les équations de la courbe de contact, qui peut être considérée comme la directrice de la surface conique circonscrite, on trouvera facilement l'équation de cette dernière.

Si le centre du cône s'éloigne à l'infini en suivant une ligne

fixe, ayant pour équations $x = mz + n$, $y = pz + q$, la surface circonscrite se réduira à un cylindre dont les arrêtes seront parallèles à cette ligne. On pourrait faire de nouveau le calcul, en considérant les plans tangens parallèles à cette ligne fixe, mais l'équation du plan de la courbe de contact peut se déduire de celle qu'on vient d'obtenir, en supposant α, β, γ infinis et tels, que l'on ait $\frac{\alpha}{\gamma} = m$ et $\frac{\beta}{\gamma} = n$. Divisant alors l'équation du plan par γ, et faisant ensuite α, β, γ infinis, elle devient, en supprimant les accens de x', y', z',

$$2az + 2a'ny + 2a''mx + by + bnz + b'x + b'mz + b''my + b''nx + c + c'n + c''m = 0.$$

Réciproquement, toute courbe plane tracée sur une surface du second degré peut être considérée comme la courbe de contact de cette surface avec un cône ou un cylindre. Car si par trois points de cette courbe on mène des plans tangens, ils se couperont en un même point, ou seront parallèles à une même droite : dans le premier cas, si l'on considère leur point de rencontre comme le centre d'un cône circonscrit, la courbe de contact devant être plane et passer par les trois points de la courbe donnée sur la surface, se confondra avec elle; et, dans le second cas, le cylindre circonscrit, dont les génératrices seraient parallèles aux intersections des trois plans tangens, ne pourrait être tangent que suivant une courbe plane qui, ayant trois points communs avec la proposée, se confondrait encore avec elle, puisqu'elles sont tracées toutes les deux sur la même surface du second degré.

Théorème. *Lorsqu'une surface du second degré en pénètre une autre du même degré, et que la courbe d'entrée est plane, la courbe de sortie le sera aussi.*

En effet, puisqu'une courbe commune aux deux surfaces est plane, il faut que des deux équations de ces surfaces on puisse déduire celle d'un plan. Or, dans les diverses combinaisons que l'on fait entre deux équations, on substitue toujours, au système des deux premières, un système équivalent composé de

deux autres équations. Mais l'équation d'un plan combinée avec celle d'une surface du second degré, ne pourrait conduire à des projections du quatrième degré, comme cela doit être pour les deux surfaces proposées; on ne pourra donc remplacer le système des deux équations données par l'une d'elles, jointe à celle d'un seul plan, mais bien par l'une d'elles et une nouvelle équation du second degré, qui, si elle représente un plan, en représentera deux. La courbe d'entrée ne pourra donc être plane sans que celle de sortie le soit pareillement.

Il pourra se faire, dans certains cas, que l'équation du second degré ne représente qu'un seul plan; alors les deux courbes d'intersection se confondront en une seule, et les deux surfaces seront tangentes, suivant toute l'étendue de cette courbe.

13° Problème. *Par un point donné, on mène un plan quelconque, qui coupe une surface donnée du second degré, et l'on demande le lieu des centres des cônes circonscrits à cette surface, suivant les diverses courbes données par l'intersection du plan mobile.*

Soit l'équation donnée

$$az^2 + by^2 + cx^2 + dx = 0,$$

qui peut représenter toutes les surfaces du second degré; soient α, β, γ, les coordonnées du point donné, et x', y', z', celles d'un quelconque des centres des cônes circonscrits; d'après le dernier problème, le plan de la courbe de contact de ce cône et de la surface aura pour équation

$$2azz' + 2byy' + 2cxx' + d(x + x') = 0.$$

Pour que ce plan passe par le point donné, il faut que son équation soit satisfaite quand on y remplace x, y, z par α, β, γ; ce qui donne

$$2a\alpha z' + 2b\beta y' + 2c\gamma x' + d(\alpha + x') = 0 \ (1).$$

Cette équation, ne renfermant de variables que les coordonnées

d'un point quelconque du lieu cherché, est l'équation même de ce lieu.

D'après la forme de cette équation, on voit facilement que ce lieu n'est autre chose que le plan de la courbe de contact du cône circonscrit à la surface donnée, et ayant son centre au point donné.

Si l'on supposait que le point $\alpha, \mathcal{C}, \gamma$, s'éloignât à l'infini sur une droite fixe ayant pour équations $x = mz + n$, $y = pz + q$, le plan mobile serait constamment parallèle à cette droite, et l'on prévoit facilement que le lieu serait le plan de la courbe de contact de la surface donnée et du cylindre parallèle à la droite fixe. C'est ce que l'on déduira de l'équation (1), en divisant tous ses termes par γ, puis faisant $\alpha, \mathcal{C}, \gamma$ infinis, et supposant $\frac{\alpha}{\gamma} = m$, $\frac{\mathcal{C}}{\gamma} = n$; on trouvera ainsi

$$2az + 2bn\gamma + 2cmx + dm = 0.$$

On serait parvenu directement au même résultat en exprimant que le plan mobile est parallèle à une droite fixe.

14ᵉ Problème. *Par une droite donnée, on mène un plan quelconque qui coupe une surface donnée du second degré, et l'on demande le lieu des centres des cônes circonscrits à cette surface suivant les diverses courbes dans lesquelles elle est coupée par le plan mobile.*

Soient les équations de la surface et de la droite données

$$az^2 + by^2 + cx^2 + dx = 0$$

et

$$x = mz + n, \quad y = pz = q.$$

L'équation du plan de la courbe de contact du cône, dont les coordonnées du centre sont x', y', z', sera

$$2azz' + 2byy' + 2cxx' + d(x + x') = 0.$$

Pour qu'il contienne la droite donnée, on aura les deux équations

$$2az' + 2cmx' + 2bny' + dm = 0, \quad (2cn + d)x' + 2bqy' + dn = 0,$$

qui, ayant lieu entre les coordonnées d'un quelconque des centres des cônes circonscrits, représenteront le lieu cherché; ces équations étant du premier degré, le lieu est une ligne droite.

Il est facile de juger que si l'on prend un point fixe quelconque sur la droite donnée, et qu'on cherche le lieu des centres des cônes circonscrits à la surface, et dont les plans de contact passent par ce point, ce lieu contiendra celui que nous venons de déterminer dans le problème actuel; d'où il résulte que si l'on fait la même construction pour tous les points de la droite fixe, tous les plans qu'on obtiendra passeront par une même droite. Les deux équations que nous avons trouvées pour déterminer cette droite représentent les lieux que l'on obtiendrait en supposant successivement que le plan mobile fût parallèle à la droite fixe, ou passât constamment par le point où elle perce le plan xy. Ces équations sont aussi celles de la droite qui joint les points de contact des plans tangens à la surface, menés par la droite donnée.

Si la droite donnée s'éloigne à l'infini en restant parallèle à un plan fixe, le plan mobile sera alors parallèle à ce dernier, et le lieu cherché sera la droite qui joindra les points de contact des plans tangens à la surface et parallèles au plan fixe. C'est ce que l'on trouverait facilement par un calcul semblable aux précédens.

15° **Problème.** *Trouver le lieu des centres des sphères tangentes à trois sphères données.*

Considérant d'abord les centres des sphères tangentes à deux des sphères données, on aura pour lieu une surface de révolution autour de la ligne qui joint leurs centres. On aura la courbe génératrice en faisant une section par un plan passant par cette ligne, ce qui ramènera à un problème de Géométrie plane, et donnera une courbe du second degré à centre. Or, dans le mouvement de révolution de cette courbe, chacune de ses deux directrices engendrera un plan perpendiculaire à l'axe, et qui jouira de la propriété que les distances d'un point quelconque de la surface à ce plan et au foyer homologue, qui est un des centres

des deux sphères, seront dans un rapport constant. Il en serait de même pour le lieu des centres des sphères tangentes à l'une de ces deux sphères et à la troisième, et l'on aurait une seconde surface de révolution engendrée par une courbe du second degré à centre, ayant un foyer commun avec la première. Considérons maintenant les deux plans engendrés par les directrices de ces deux surfaces qui correspondent au foyer commun. Si l'on prend un point quelconque de la courbe cherchée, qui est l'intersection des deux surfaces de révolution, qu'on appelle d sa distance au foyer commun, et p, p', ses distances aux deux plans directeurs, on aura les proportions suivantes, dans lesquelles les seconds rapports sont connus,

$$d : p :: m : n,$$
$$p' : d :: m' : n';$$

d'où l'on tire

$$p' : p :: mm' : nn'.$$

Les perpendiculaires abaissées sur les deux plans étant dans un rapport connu, la courbe cherchée sera située dans un plan qui passera par leur droite d'intersection, et se déterminera facilement. Connaissant l'équation de ce plan, et la joignant à l'une de celles des surfaces de révolution, on aura les équations de la courbe cherchée.

Nous laissons aux élèves le soin de faire ces calculs, qui ne sauraient offrir de difficultés; ils discuteront toutes les positions relatives des sphères, et supposeront qu'elles se réduisent successivement à des plans : il suffira pour cela de supposer qu'un de leurs points restant fixe, le centre s'éloigne à l'infini dans la direction constante du rayon mené par ce point fixe.

Quant au lieu des points de contact de la sphère mobile avec chacune des trois autres, on trouvera pour chaque sphère un petit cercle perpendiculaire au plan des trois centres fixes.

16° Problème. *Trouver l'équation de la surface engendrée par une droite qui s'appuie sur deux droites fixes, en faisant avec l'une d'elles un angle constant, dont la tangente est* n.

Soit a la plus courte distance des deux droites données, m la

tangente de leur angle. Prenons leur commune perpendiculaire pour axe des z; pour axe des x celle des deux droites avec laquelle la génératrice fait un angle constant, et pour axe des y une perpendiculaire aux deux premières.

Les équations de la seconde droite donnée seront

$$z = a, \quad y = mx.$$

Celles de la droite mobile assujettie à couper l'axe des x seront

$$(1) \ldots x = \mathrm{K}z + h, \quad y = \mathrm{K}'z.$$

Éliminant x, y, z, entre ces quatre équations, on aura la condition, pour que la génératrice coupe la seconde droite donnée; l'équation résultante sera

$$(2) \ldots \mathrm{K}a + h = \frac{\mathrm{K}'a}{m}.$$

Enfin, le cosinus de l'angle que fait la génératrice avec l'axe des x étant exprimé par $\frac{\mathrm{K}}{\sqrt{1+\mathrm{K}^2+\mathrm{K}'^2}}$, on aura, d'après les conditions données, l'équation suivante

$$(3) \ldots \frac{\mathrm{K}}{\sqrt{1+\mathrm{K}^2+\mathrm{K}'^2}} = \frac{1}{1+n^2}.$$

Éliminant K, K' et h, entre les équations (1), (2), (3), on obtiendra l'équation du lieu cherché, qui sera, toute réduction faite,

$$(4) \ldots m^2(z^2+y^2)(z-a)^2 = n^2(ay-mxz)^2.$$

On observera que n n'entrant qu'au second degré dans cette équation, la surface qu'elle représente contiendra toutes les droites qui rencontreraient les deux droites données, en faisant avec l'axe des x l'angle obtus supplément du premier.

Si la génératrice était perpendiculaire sur la droite fixe, on aurait $n = \infty$; divisant d'abord l'équation (4) par n^2, et supposant ensuite $n = \infty$, on trouvera

$$ay - mxz = 0;$$

ce qui donne un paraboloïde hyperbolique, comme on devait s'y attendre, puisque la génératrice se trouve alors parallèle à un plan fixe perpendiculaire à l'axe des x.

Si les deux droites données étaient perpendiculaires entre elles, m serait infini, et l'équation (4) divisée par m^2 se réduirait alors à

$$(z^2+y^2)(z-a)^2=n^2x^2z^2;$$

et si l'on supposait en même temps $n=\infty$, elle deviendrait $x^2z^2=0$, équation qui donne le plan XY et le plan YZ; ce que l'on pouvait facilement prévoir.

Enfin, si l'on avait $a=0$, les deux droites données se couperaient à l'origine, et l'équation de la surface deviendrait

$$(z^2+y^2)z^2=n^2z^2,$$

et se décomposerait en $z^2=0$ et $z^2+y^2=n^2x^2$. La première donne le plan même des deux droites qui, en effet, peut être engendré par une droite qui se mouverait en faisant avec la première un angle constant, et en les rencontrant toutes les deux. La seconde équation $z^2+y^2=n^2x^2$ représente un cône droit ayant pour axe l'axe des x et pour angle au centre l'angle donné. C'est encore ce que l'on pouvait facilement prévoir; car toutes les génératrices de ce cône rencontreront les deux droites données, puisqu'elles passent toutes par l'origine, et, de plus, elles feront avec l'axe des x l'angle donné.

Théorème. *Si l'on projette une aire plane sur trois plans rectangulaires, et qu'on projette ensuite ces trois aires sur le plan de la première, la somme de ces trois nouvelles projections sera égale à l'aire de la figure primitive.*

Soit m l'aire de la figure donnée, et α, β, γ les angles que son plan fait avec les trois plans rectangulaires; les projections sur ces plans auront respectivement pour expressions

$$m\cos\alpha,\quad m\cos\beta,\quad m\cos\gamma.$$

Les projetant de nouveau sur le premier plan, on obtiendra pour expressions des nouvelles aires

$$m\cos^2\alpha,\ m\cos^2\beta,\ m\cos^2\gamma,$$

et ces trois quantités ajoutées entre elles donnent m, puisqu'on a la relation connue $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Si l'on traite ces trois nouvelles figures comme la première, chacune fournira trois nouvelles projections sur le même plan, et généralement si l'on répète cette opération m fois, on aura sur le plan donné un nombre de figures marqué par 3^m, et dont la somme sera toujours égale à l'aire de la figure donnée.

Théorème. *Si l'on projette une figure plane sur trois plans coordonnés rectangulaires, la somme des cônes qui auront pour bases ces projections et pour sommet commun un point quelconque du plan de la figure sera égale au cône ayant son sommet à l'origine et pour base la figure donnée.*

Soient a, b, c les cônes donnés des points où le plan de la figure coupe les axes, l'équation de ce plan sera

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1.$$

Désignons par m l'aire de la figure et par p la perpendiculaire abaissée de l'origine sur son plan; l'équation précédente étant multipliée par $\frac{mp}{3}$, deviendra

$$\frac{mp}{3a}\times x+\frac{mp}{3b}\times y+\frac{mp}{3c}\times z=\frac{mp}{3}.$$

Or $\frac{p}{a}, \frac{p}{b}, \frac{p}{c}$ sont les cosinus des angles que le plan donné fait avec les plans rectangulaires; et par conséquent $\frac{mp}{a}, \frac{mp}{b}, \frac{mp}{c}$ sont les projections de la figure donnée sur ces mêmes plans; de plus x, y, z sont les perpendiculaires abaissées d'un point quelconque du plan sur ces trois projections. Le premier membre de la dernière équation représente donc la somme algébrique de trois cônes ayant leurs sommets au point x, y, z du plan, et pour bases les projections de la figure donnée. De plus le second membre est évidemment l'expression du volume d'un cône ayant son sommet à l'origine et pour base la figure donnée; ce qui démontre le théorème annoncé.

La composition des signes des quantités a, b, c, x, y, z, mon-

trera dans chaque cas si les cônes doivent être ajoutés ou retranchés.

Si l'on projette de nouveau les trois premières projections sur le plan donné, on aura trois aires dont la somme sera égale à celle de la première figure; et par conséquent les cônes dont elles seraient les bases, et qui auraient leur sommet à l'origine, donneraient encore pour somme $\frac{mp}{3}$. Si l'on traite chacune de ces trois aires comme la première, on obtiendra 9 cônes dont la somme algébrique sera $\frac{mp}{3}$; et généralement cette somme sera toujours la même pour les projections de l'ordre m qui fourniront un nombre de cônes marqué par 3^m.

Problèmes proposés aux concours des Colléges royaux de Paris.

1er Problème. *Les deux côtés* AE, AF (*fig.* 158) *d'un angle plan* EAF *étant supposés fixes et coupés par une droite mobile* BC; *trouver la courbe que décrit le centre de gravité* G *du triangle* ABC, *quand la droite* BC *se meut de telle sorte, que la surface du triangle* ABC *reste constante.*

Choisissons pour axes des y et des x, les côtés AE, AF de l'angle A que nous désignerons par C. Soient aussi x', y' les distances variables AC, AB, et m^2 le double du carré auquel la surface du triangle ABC doit être constamment égale. On sait que

$$\text{ABC} = \frac{1}{2}x'y'\sin C = \frac{1}{2}m^2.$$

Mais en désignant par x et y les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC, on aura

$$x' = 3x,\quad y' = 3y.$$

Portant ces valeurs dans l'équation précédente, il en résultera celle du *lieu demandé* qui est

$$xy = \frac{m^2}{9\sin C}.$$

Cette équation appartient à une hyperbole qui devient équilatère quand l'angle $\mathcal{C}$ est droit. Les axes en sont les asymptotes; et si m^2 est nul, la courbe se réduira au système de ses deux axes.

2ᵉ Problème. (*Fig.* 159). *Étant donné un quadrilatère* AGFH *dont les quatre côtés ne sont pas situés dans un même plan, on demande :*

1°. *L'équation de la surface décrite par une droite* ED, *qui dans son mouvement couperait toujours proportionnellement les deux côtés opposés* AH, GF, *de manière que dans chaque position de la droite génératrice on eût la proportion*

$$AE : EH :: GD : DF.$$

2°. *L'équation de la surface engendrée par le mouvement d'une seconde droite* BC, *qui couperait proportionnellement les deux autres côtés du même quadrilatère, de sorte qu'on eût la proportion*

$$AB : BG :: CH : CF.$$

3°. *On demande si les deux surfaces sont différentes.*

Je prends les deux côtés AG, AH du quadrilatère pour axes des x et des z; par la ligne AG, je fais passer un plan parallèle à FH, auquel, d'après un théorème connu de Géométrie, ED sera parallèle dans toutes ses positions. De même, par AH, je mène un plan parallèle à FG, et auquel BC restera parallèle pendant son mouvement. Ces deux plans se couperont suivant une droite que je prends pour axe des y.

Les équations de FG sont $\quad x = m, \quad y = bz,$
Celles de FH sont $\quad z = n, \quad y = ax.$

La condition, pour que ces lignes se coupent, établit entre les coefficiens m, n, b, a, la relation

$$(1) \ldots \frac{a}{n} = \frac{b}{m}.$$

Cela posé, la génératrice DE étant parallèle au plan xy, ses équations sont

$$y = ax, \quad z = \mathcal{C}.$$

Si l'on exprime que cette droite s'appuie sur le côté GF du quadrilatère, on trouvera l'équation de condition

$$b\mathfrak{C} = \alpha m,$$

$\mathfrak{C}$ et α étant constantes pour tous les points d'une même génératrice, et variables, d'une position à l'autre de la génératrice. On aura donc un résultat commun à toutes les positions de la génératrice, et par suite l'équation de la surface demandée, si l'on remplace $\mathfrak{C}$ et α par leurs valeurs z et $\frac{y}{x}$. Ce qui donne

$$(2)\ldots y = \frac{b}{m} xz.$$

On trouvera de même que la surface engendrée par BC a pour équation la relation (2).

Par conséquent les deux surfaces coïncident.

Il suit de là que les deux génératrices DE, CB se coupent; ce qui démontre une proposition exposée dans le Traité de Géométrie de M. *Le Gendre* (Prop. 16, liv. V).

Reprenons l'équation (2); en y faisant $\frac{m}{b} = p$, elle se réduit à

$$(3)\ldots zx = py.$$

On voit d'abord que la surface passe par l'origine. On obtiendra l'intersection de cette surface par le plan des xy, en faisant $z = 0$; ce qui donne $y = 0$, et laisse x arbitraire; cette intersection est donc l'axe des x.

On trouvera aussi que l'axe des z est l'intersection de la surface et du plan zy.

Maintenant, coupons la surface par une suite de plans parallèles au plan xy; l'équation générale de ces plans est $z = \alpha$, et celle des sections est $y = \frac{\alpha}{p} x$. D'où l'on voit que ces sections sont des lignes droites, donc les projections sur le plan xy passent par l'origine.

La symétrie de l'équation de la surface par rapport aux va-

riables z et x, montre que ses intersections par des plans parallèles au plan yz, sont également des droites dont les projections sur ce plan passent par l'origine.

Considérons la variable y qui n'entre pas de la même manière dans l'équation (3) de la surface, et faisons $y=\mathcal{C}$. L'équation (3) se change en $zx=p\mathcal{C}$; elle appartient sous cette forme à une suite d'hyperboles situées dans des plans parallèles aux zx, dont la position dépend du signe de $\mathcal{C}$. Quand $\mathcal{C}=0$, l'intersection se réduit au système des axes z et x.

Pour achever de découvrir les diverses courbures de la surface, nous allons la couper par des plans tournant autour de chacun des axes coordonnés.

Nous ferons d'abord passer un plan par l'axe des x; son équation, qui est la même que celle de sa trace sur zx, sera $y=kz$. Éliminant y entre cette équation et celle de la surface, il vient, pour la projection des points communs sur xz, l'équation $z(x-pk)=0$, qui se divise en $z=0$ et $x=pk$. C'est l'axe des x d'une part, et une parallèle à l'axe des z de l'autre.

On trouverait de même, en considérant des plans tournant autour de l'axe des z, que leurs points communs avec la surface se projettent sur zx suivant l'axe des z et des parallèles à l'axe des x.

Enfin si l'on mène un plan par l'axe des y, sa trace sur zx aura pour équation $z=k'x$; la combinant avec celle de la surface, par l'élimination de z, on aura $k'x^2=py$. Ces projections sont des paraboles, quel que soit k'.

Il serait facile de reconnaître que les courbes projetées sont elles-mêmes des paraboles.

Cette surface est celle qu'on nomme *paraboloïde hyperbolique*.

3e Problème. *Les trois arêtes d'un angle solide* A (fig. 160) *étant supposées fixes et coupées par un plan mobile* BDC, *trouver l'équation de la surface courbe que décrit le centre de gravité de la pyramide comprise entre les faces de l'angle solide et le plan dont il s'agit, quand ce plan se meut de manière que le volume de la pyramide reste toujours le même.*

Nous prendrons les arêtes AC, AD, AB, de l'angle solide A

pour les axes des x, des y et des z; d'où il suit que ses faces seront les plans coordonnés. Nous désignerons par x', y', z', les distances AC, AD, AB, du sommet de l'angle au plan mobile BCD considéré dans une de ses positions. Cela posé, le volume de la pyramide BACD est égal à DAC $\times \frac{1}{3}$ BP; BP étant la perpendiculaire abaissée du point B sur la face DAC. L'aire du triangle DAC est représentée par $\frac{1}{2} x'y' \sin \alpha$, ($\alpha$ désigne l'angle connu DAC).

Le triangle rectangle BAP, dont l'angle A est l'inclinaison donnée de l'arête AB sur le plan DAC, va servir à déterminer BP. En effet, soit β l'angle BAP; on a

$$1 : z' :: \sin \beta : BP; \quad \text{d'où} \quad BP = z' \sin \beta.$$

Portant ces valeurs de DAC et de BP dans l'expression du volume de la pyramide, et prenant $\frac{1}{6} m^3$ pour la *constante* à laquelle ce solide doit toujours être égal, on aura

$$x'y'z' \sin \alpha \sin \beta = m^3.$$

Il ne reste plus qu'à exprimer les variables x', y', z' en fonction des coordonnées x, y, z du centre de gravité G de la pyramide. Or, on sait que AH $=$ 4GH; d'où l'on voit, au moyen de triangles faciles à construire, que

$$z' = 4z, \quad y' = 4y, \quad x' = 4x.$$

Substituant dans l'équation ci-dessus, elle devient

$$(1) \ldots xyz = \frac{m^3}{64 \sin \alpha \sin \beta}.$$

C'est l'équation du lieu géométrique décrit par le centre de gravité de la pyramide. Il est aisé de voir que cette surface est *asymptote* aux trois plans de l'angle solide A. Si on la coupe par des plans parallèles aux plans coordonnés, par exemple par un plan parallèle à celui des xy dont l'équation est $z = a$, la projection de l'intersection sur ce dernier plan sera

$$xy = \frac{m^3}{64 \, a \sin \alpha \sin \beta},$$

équation qui appartient à une hyperbole ayant pour asymptotes les axes des x et des y.

Il en sera de même par rapport à toutes les sections faites dans la surface par des plans parallèles aux xz et aux yz; ce qui permet de la considérer comme une sorte d'*hyperboloïde du troisième ordre.* Cette surface est composée de quatre *nappes* indéfinies qui occupent chacune l'un des huit angles trièdres formés autour du sommet A de la pyramide par les plans des coordonnées. Mais on remarquera que les diverses nappes ne s'étendent pas dans les angles opposés par le sommet. Ces propriétés sont une conséquence de l'équation de la surface dont la forme étant $xyz = P$, exige que les variables soient toutes trois positives, ou que l'une soit positive et les deux autres négatives. Ces quatre combinaisons de signes répondent aux quatre nappes, et les fixent dans des angles trièdres tels, qu'aucuns ne sont opposés par le sommet.

Lorsque l'angle solide A est rectangulaire, on a $\sin\alpha = \sin 6 = 1$, et l'équation de la surface se réduit à

$$xyz = \frac{m^3}{64} = \left(\frac{m}{4}\right)^3.$$

Si $m = o$, l'équation correspondante $xyz = o$ est satisfaite par les trois plans coordonnés.

4e Problème. *Etant données une sphère et trois droites dans l'espace, mener un plan tangent à la sphère qui fasse des angles égaux avec ces droites.*

Soient AB, CD, EF (*fig.* 161) les trois droites, et OGMH la sphère donnée. Nous prendrons la première de ces lignes pour axe des Z, et la perpendiculaire AO menée du centre de la sphère pour celui des x. L'axe des y sera élevé par le point A perpendiculairement au plan ZAX.

Les équations des droites AB, CD, EF, rapportées à ce système d'axes seront

$$\left\{\begin{matrix} x = o \\ y = o \end{matrix}\right\}, \quad \left\{\begin{matrix} x = az + \alpha \\ y = bz + 6 \end{matrix}\right\}, \quad \left\{\begin{matrix} x = a'z + \alpha' \\ y = b'z + 6' \end{matrix}\right\};$$

faisant $AO = p$, la sphère dont le rayon est R aura pour équation

$$(x-p)^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Enfin, le plan tangent cherché RS aura pour équation

$$Ax + By + z = D.$$

Il s'agit de déterminer les coefficiens A, B, D en fonction des constantes qui entrent dans les équations des trois droites et dans celle de la sphère. Pour cela, nous calculerons les sinus des angles que font les trois droites avec le plan RS. On trouve pour le sinus de l'angle que fait AB avec le plan RS,

$$\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+1}},$$

et pour les sinus des angles formés par CD et EF avec le plan RS,

$$\frac{Aa+Bb+1}{\sqrt{1+a^2+b^2}\sqrt{1+A^2+B^2}}, \quad \frac{Aa'+Bb'+1}{\sqrt{1+a'^2+b'^2}\sqrt{1+A^2+B^2}}.$$

Egalant l'expression du premier sinus à celles des deux autres, on aura deux équations qui serviront à déterminer A et B. Ces équations sont

$$\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+1}} = \frac{Aa+Bb+1}{\sqrt{1+a^2+b^2}\sqrt{1+A^2+B^2}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+1}} = \frac{Aa'+Bb'+1}{\sqrt{1+a'^2+b'^2}\sqrt{1+A^2+B^2}}.$$

On en tire

$$A = \frac{b'(\sqrt{a^2+b^2+1}-1) - b(\sqrt{a'^2+b'^2+1}-1)}{ab'-ba'},$$

$$B = \frac{a(\sqrt{a'^2+b'^2+1}-1) - a'(\sqrt{a^2+b^2+1}-1)}{ab'-ba'}.$$

Ces valeurs portées dans l'équation du plan exprimeraient qu'il fait des angles égaux avec les trois droites. Si le coefficient D reste encore indéterminé, c'est que tout plan parallèle à RS rencontrerait les droites sous les mêmes angles.

Mais la valeur de D se déduira de la condition que le plan RS soit tangent à la sphère. A cet effet, abaissons le rayon OM perpendiculairement sur le plan RS, les équations de OM seront

$$x = Az + p \quad \text{et} \quad y = Bz.$$

Le point M où ce rayon coupe la sphère a pour coordonnées

$$x = \frac{AR}{\sqrt{A^2+B^2+1}} + p, \; y = \frac{BR}{\sqrt{A^2+B^2+1}}, \; z = \frac{R}{\sqrt{A^2+B^2+1}}.$$

Ces valeurs portées dans l'équation du plan conduiront à

$$D = \pm R\,(A^2 + B^2 + 1) + Ap.$$

L'équation générale des plans tangens qui répondent aux conditions du problème est donc

$$Ax + By + z = \pm R\,(A^2 + B^2 + 1) + Ap,$$

A et B devant être remplacés par leurs valeurs ci-dessus calculées.

Si l'on combine le double signe des deux radicaux carrés qui entrent dans les formules, on voit que A et B sont susceptibles de quatre valeurs, et que chacun de ces couples donne deux plans tangens parallèles; ainsi le problème a huit solutions.

On aura l'angle formé avec les trois droites par les plans non parallèles, en portant les valeurs conjuguées de A et B dans l'expression du sinus de cet angle qui est

$$\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + 1}}.$$

Le calcul de la substitution ne présentant aucune simplification importante, nous nous dispenserons de le rapporter, ainsi que d'examiner ce qui arrive quand les droites données sont parallèles toutes trois ou perpendiculaires entre elles, et géné-

ralement quand leurs positions respectives modifient les formules qui font connaître A et B. Les élèves pourront entreprendre cette discussion.

5e Problème. *Un cercle étant donné dans un plan horizontal, on demande, 1°. de faire voir que si l'on coupe un cône droit dont le cercle soit la base, par une suite de plans verticaux et parallèles entre eux, les sections résultantes seront des hyperboles qui auront leurs asymptotes parallèles ; 2°. de trouver sur la verticale élevée par le centre du cercle, le point où il faut placer le sommet du cône pour que les hyperboles soient équilatères.*

Je place l'origine des coordonnées au sommet du cône, je prends son axe pour axe des z, et le plan des xy parallèle à celui du cercle donné. Dans cette position, l'équation du cône rapporté à des axes rectangulaires est

$$x^2+y^2=\frac{a^2}{c^2}\times z^2,$$

a représentant le rayon du cercle, et c la hauteur du cône. Observons maintenant que la surface étant symétrique par rapport à l'axe des z, tout plan vertical, quelle que soit sa position, donnera même intersection à distance égale de l'origine. Il suffit donc de considérer les plans coupans dans une direction particulière. Nous les prendrons parallèles au plan des yz ; alors ils ont pour équation $x=m$, et toutes les intersections se projetteront dans leur véritable grandeur sur ce plan. L'élimination de x donne l'équation

$$y=\pm\sqrt{\frac{a^2}{c^2}z^2-m^2},$$

qui représente une hyperbole, pour toutes valeurs de m. Les asymptotes communes à cette suite d'hyperboles ont pour équation

$$y=\pm\frac{a}{c}z.$$

Résultat indépendant de m, et qui caractérise les deux génératrices du cône situées dans le plan yz. Il suit de là,

1°. Que tous les plans verticaux parallèles au plan yz coupent le cône suivant des hyperboles qui ont leurs asymptotes parallèles aux deux génératrices opposées du cône placées dans le plan des yz.

2°. Que chacune de ces hyperboles a son centre sur l'axe des x.

D'après ce qui précède, on serait conduit à des résultats semblables pour toute autre direction des plans verticaux parallèles.

Cherchons enfin quel est le sommet qui rendra les hyperboles équilatères. On sait que le caractère de cette classe de courbes du second degré est d'avoir ses asymptotes rectangulaires. Cette condition donne $a = c$, c'est-à-dire que la hauteur du cône doit être égale au rayon de sa base.

6e Problème. *Trouver l'équation de la surface engendrée par une parabole tournant autour de son axe, et déterminer la position que doit avoir cet axe pour que l'intersection de la surface par un plan quelconque donne un cercle pour projection sur un plan donné.*

Prenons le plan des x et y parallèle au plan donné, et l'origine au sommet de la parabole.

Cela posé, les équations de l'axe de la parabole seront

$$x = mz, \quad y = nz.$$

Celle d'un plan quelconque perpendiculaire à cette droite sera

$$z + mx + ny = \alpha.$$

Le point d'intersection de ce plan avec l'axe aura pour coordonnées

$$z = \frac{\alpha}{1 + m^2 + n^2}, \quad y = \frac{n\alpha}{1 + m^2 + n^2}, \quad x = \frac{m\alpha}{1 + m^2 + n^2},$$

et si l'on nomme d la distance de ce point à l'origine, on aura

$$d = \frac{\alpha}{\sqrt{1 + m^2 + n^2}}.$$

Nommant p la perpendiculaire abaissée du point où le plan

coupe la parabole sur l'axe de la parabole, on devra avoir

$$(1) \ldots p^2 = 2ad,$$

$2a$ étant le paramètre donné de la parabole.

Calculant p qui est la distance de deux points dont on a l'expression des coordonnées, et substituant dans l'équation (1) les valeurs de p et d en fonction de α, puis remettant, au lieu de α, sa valeur $z + mx + ny$, on aura l'équation du lieu qui sera

$$z^2(m^2+n^2)+y^2(1+m^2)+x^2(1+n^2)-2nzy-2mzx-2mnxy$$
$$=2a(z+mx+ny)\sqrt{1+m^2+n^2}.$$

Soit maintenant l'équation d'un plan quelconque

$$z = Ax + By + C;$$

pour avoir la projection de son intersection avec la surface, sur le plan xy ou sur tout autre plan parallèle, il suffira d'éliminer z entre son équation et celle de la surface. On pourra même pour plus de simplicité supposer $C=0$, parce que toutes les sections parallèles dans les surfaces du second degré sont semblables. Substituant donc $Ax+By$ à z dans l'équation de la surface, il faudra, pour que l'équation résultante soit celle d'un cercle, que le coefficient de xy soit nul, et que les coefficiens de x^2 et y^2 soient égaux; ce qui donne les deux conditions

$$AB(m^2+n^2) - An - Bm - mn = 0,$$
$$1+n^2+A^2(m^2+n^2)-2mA = 1+m^2+B^2(m^2+n^2)-2nB.$$

Or, la première ne peut être satisfaite, quels que soient A et B, que si l'on a $m=0$, $n=0$, et dans ce cas, la seconde le sera aussi identiquement.

Il résulte de là que l'axe de la parabole doit être perpendiculaire au plan sur lequel on projette les sections planes de la surface, et de plus que cette condition est suffisante. L'équation de la surface se réduit alors à

$$x^2+y^2=2az.$$

On pourrait facilement démontrer *à priori* par la Géométrie

simple, que la projection d'une section plane quelconque d'un paraboloïde de révolution sur le plan tangent au sommet est un cercle.

7° Problème. *On donne de position le rayon d'une sphère, et l'on propose de démontrer qu'un plan quelconque perpendiculaire à ce rayon, coupe suivant un cercle tout cône qui a son sommet à l'extrémité du rayon et pour base un cercle de la sphère.*

Nous placerons l'origine des coordonnées rectangulaires au sommet A (*fig.* 162) du cône, le plan des xy sera parallèle au petit cercle de la sphère qui sert de base au cône, et celui des zx passera par le centre de la sphère.

L'équation du petit cercle DKE est

$$(x-a)^2+y^2=d^2,\ z=c,$$

a représentant l'abscisse du centre de la sphère, d le rayon BD et c la distance BO.

Une droite, tournant autour du point fixe A en s'appuyant constamment sur la circonférence DKE, engendrera une surface conique dont l'équation sera (*)

$$(1)\ldots\ (cx-az)^2+c^2y^2=d^2z^2.$$

Pour exprimer que ce cône est inscrit dans la sphère, il faut remplacer d par une fonction du rayon R de la sphère.

Le triangle BCE donne $\overline{BE}^2=\overline{CE}^2-\overline{BC}^2$.

D'ailleurs $\quad BC = BO - OC.$

Désignant OC par b, il vient

$$d^2=R^2-(c-b)^2.$$

Substituant dans (1), on aura pour l'équation du cône inscrit,

$$(2)\ldots\ (cx-az)^2+c^2y^2=z^2[R^2-(c-b)^2].$$

(*) Voyez l'Application de l'Algèbre à la Géométrie, de Reynaud.

Il reste à couper ce cône par un plan perpendiculaire au rayon CA, et à reconnaître la nature de l'intersection.

L'équation du rayon CA, qui est dirigé dans le plan des zx en passant par l'origine est

$$x=\frac{a}{b}z.$$

Celle du plan qui lui sera perpendiculaire en un point quelconque I sera

$$x=-\frac{b}{a}z+\text{P},$$

y restant arbitraire. Maintenant soit M un point de l'intersection du cône par le plan perpendiculaire $z'\text{A}'y'$, et proposons-nous de rapporter tous ces points aux deux coordonnées rectangulaires $\text{A}'z'$, $\text{A}'y'$ prises dans le plan coupant. A cet effet, nous observerons que le point M satisfait à l'équation du cône inscrit; par conséquent, si l'on exprime ses coordonnées

$$\text{AQ}=x,\quad \text{PQ}=y,\quad \text{PM}=z,$$

au moyen de $\quad \text{A}'\text{R}=y' \quad$ et $\quad \text{RM}=z'$,

on aura, par la substitution des valeurs de x, y, z en fonction de y' et de z' dans (2), l'équation de l'intersection. Or, on a évidemment $\text{PQ}=\text{A}'\text{R}$ ou $y=y'$.

Le triangle MRP donne $\quad$ PR $\quad$ ou $\quad \text{A}'\text{Q}=\text{MR}\cos\text{MRP}$;

mais $\qquad \text{A}'\text{Q}=\text{AA}'-\text{AQ}=\text{P}-x$,

et l'angle MRP est égal à l'angle $z'\text{A}'\text{A}$ dont la tangente trigonométrique est $\frac{a}{b}$. Donc

$$\cos\text{MRP}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{b}{\text{R}}.$$

Ainsi $\qquad \text{P}-x=\frac{bz'}{\text{R}} \quad$ ou $\quad x=-\frac{bz'}{\text{R}}+\text{P},$

Enfin, le même triangle MRP donne

$$\mathrm{MP} = \mathrm{MR} \sin \mathrm{MRP}; \quad \text{donc} \quad z = \frac{az'}{\mathrm{R}}.$$

Portant ces valeurs de x, y, z dans l'équation (2), elle donnera pour l'équation de l'intersection du cône par le plan $z'\mathrm{A}'y'$

$$\left[\left(c\mathrm{P} - \frac{bcz'}{\mathrm{R}}\right) - \frac{a^2z'}{\mathrm{R}}\right]^2 + c^2y'^2 = \frac{a^2z'^2}{\mathrm{R}^2}[\mathrm{R}^2 - (c-b)^2].$$

Il reste à reconnaître que le *lieu* de cette équation est un cercle, ce qui sera vérifié si les coefficiens de y'^2 et de z'^2, lorsque ces termes auront été transportés dans le premier membre de l'équation, sont égaux et de même signe. A cet effet, nous ordonnerons par rapport aux variables. Ce calcul conduit à

$$c^2\mathrm{R}^2y'^2 + \{(bc+a^2)^2 - a^2[\mathrm{R}^2-(c-b)^2]\}z'^2 - 2c\mathrm{PR}(bc+a^2)z' \\ + c^2\mathrm{P}^2\mathrm{R}^2 = 0.$$

Développant le coefficient de z'^2, on peut l'écrire ainsi

$$c^2(a^2 + b^2) + a^2(a^2 + b^2) - a^2\mathrm{R}^2.$$

Observant que $a^2 + b^2 = \mathrm{R}^2$, il se réduit à $c^2\mathrm{R}^2$, qui est aussi le coefficient de y'^2. Donc l'intersection est un cercle; et comme ce résultat est le même pour toute valeur de P, il s'ensuit que la section faite dans un cône inscrit à une sphère par un plan quelconque perpendiculaire au rayon qui passe par le sommet, est constamment un *cercle*.

8e Problème. *Etant donné un cône droit dans lequel le rayon de la base est le tiers de l'apothème, si l'on prend sur la surface du cône un point situé à la distance* a *du sommet, et que de ce point, comme centre, avec une ouverture de compas égale à* r, *on trace sur la surface du cône une courbe, laquelle pourrait être considérée comme l'intersection de cette surface avec celle de la sphère qui a son centre au point donné, et dont le rayon est* r. *Si ensuite on développe la surface convexe du cône en une surface plane, laquelle sera un secteur circulaire, dont l'angle*

est $\frac{3}{4}$ d'angle droit, on demande l'équation de la courbe tracée sur la surface du cône, et devenue plane par le développement de cette même surface en un secteur plan. L'équation de la courbe étant trouvée en général pour toutes les valeurs de r *et de* a, *on fera* $a=3$, $r=2$, *et on déterminera pour ce cas particulier la figure exacte de la courbe, en la traçant dans toute son étendue.*

On examinera de plus si la courbe est décrite tout entière par le compas qui tourne autour du point donné, ou s'il n'y a qu'une partie de la courbe décrite par ce procédé, et quelle est cette partie.

Concevons le cône et la sphère décrits du point donné A (*fig.* 163) et supposons un plan horizontal HB qui coupe ces deux surfaces, respectivement suivant un cercle que nous projeterons sur la base du cône. Joignons enfin leurs centres et un de leurs points d'intersection, nous formerons ainsi un triangle EFG.

Cela posé, il est clair que le plan *méridien* passant par le point F contiendra les points de la courbe situés à la hauteur HB, ou, ce qui est la même chose, à la distance SB du sommet; et que, par conséquent, l'un de ces points se trouverait sur la génératrice passant par le point L, qui, dans le développement, fera avec la génératrice SK un angle qui aura pour mesure un arc égal en longueur à LK, décrit du rayon SK; mais l'angle EGF a pour mesure le même arc décrit d'un rayon trois fois moindre, il est donc triple du précédent; en sorte que l'équation polaire de la courbe que l'on cherche ne dépend que d'une relation entre $SB=v$ et $EGF=3u$. Or, le triangle EGF donne

$$\cos EGF=\frac{\overline{EG}^2+\overline{GF}^2-\overline{EF}^2}{2EG\times GF},$$

$$EGF=3u,\quad EG=\frac{1}{2}SA=\frac{1}{3}a,\quad GF=\frac{1}{3}SB=\frac{1}{3}v,$$

$$\overline{EF}^2=r^2-\overline{BC}^2=r^2-\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=r^2-(a-v)^2;$$

$$+\frac{1}{9}(a-v)^2=r^2-\frac{8}{9}(a-v)^2;$$

d'où

$$\cos 3u = \frac{a^2 + v^2 - 9r^2 + 8(a-v)^2}{2av},$$

ou $$\cos 3u = 1 - \frac{9}{2}\left[\frac{r^2 - (a-v)^2}{av}\right];$$

telle est l'équation polaire de la courbe, en comptant les angles à partir de la génératrice qui passe par le point donné, et les rayons vecteurs, à partir du sommet du cône.

Si dans cette équation on fait $a = 3$, $r = 2$, on trouve

$$\cos 3u = 1 - \frac{3}{2}\left(\frac{4-(3-v)^2}{v}\right);$$

d'où

$$v = \frac{8 + \cos 3u}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{19 + \cos^2 3u + 16 \cos 3u}.$$

Sous la première forme, l'équation nous montre, à cause des trois valeurs de u correspondantes à une valeur de $\cos 3u$, que si l'on partage la circonférence en trois secteurs de $\frac{3}{4}$ d'angle droit chacun, la courbe sera symétrique dans chacun de ces secteurs; en sorte qu'il suffira de voir sa forme entre les lignes PB, PB'; mais CB, sur laquelle on compte les angles, partageant BPB' en deux parties égales, la même forme d'équation fait voir que la portion de la courbe comprise entre ces deux droites, sera symétrique au-dessus et au-dessous de PC; en sorte qu'il suffit de la discuter dans l'angle BPC; c'est-à-dire depuis $\cos 3u = -1$, jusqu'à $\cos 3u = +1$; les valeurs de v correspondantes sont:

$$v = \frac{7 \pm 2}{3} \left\{ \begin{matrix} = 3, \\ = \frac{5}{3} \end{matrix} \right. \qquad v = 3 \pm 2 \left\{ \begin{matrix} = 1, \\ = 5; \end{matrix} \right.$$

or, en prenant le signe positif pour le radical, on voit facilement que $\cos 3u$ augmentant depuis -1 jusqu'à $+1$, v augmente depuis 3 jusqu'à 5; donc la courbe aura à peu

près la forme EC, si PE $= 3$, $P = 5$. Il y aura une autre branche (ce) séparée de la première, pour laquelle $Pe = \frac{5}{3}$, $Pc = 1$; car il est facile de prouver qu'il n'existe pas de courbe entre le point e et le point E; pour cela faisons $v = 3 - \delta$ dans la première équation, δ étant moindre que Ee, et par conséquent moindre que 2, nous aurons

$$\cos 3u = 1 - \frac{3}{2}\left(\frac{4 - \delta^2}{3 - \delta}\right):$$

or, $\frac{3}{2}\left(\frac{4 - \delta^2}{3 - \delta}\right)$ est positif, si $\delta < 2$; et il faudra que l'on ait $\frac{3}{2}\left(\frac{4 - \delta^2}{3 - \delta}\right) < 2$, ou au plus égal; de là on tire $\delta > \frac{4}{3}$ ou égal; d'où $v < 3 - \frac{4}{3} < \frac{5}{3}$, ou au plus égal, quand..... $\cos 3u = -1$, c'est-à-dire sur le rayon PB.

Enfin la génération de la courbe fait voir que la plus grande valeur du rayon vecteur PC est $3 + 2$, et que la plus petite $Pc = 3 - 2$; donc si on achève la courbe dans les autres angles où elle est symétrique, et que l'on décrive quatre cercles du centre P, avec les rayons 5, 3, $\frac{5}{3}$, 1 la courbe sera tout entière comprise dans le cercle PC qu'elle touchera aux points C, F, L; elle se composera de deux courbes distinctes, l'une comprise entre ce premier cercle et le cercle PE qu'elle touchera aux points E, N, I; l'autre comprise entre les cercles décrits du rayon Pc qu'elle touchera aux points c, g, l, et du rayon Pe qu'elle touchera aux points e, n, i; il n'y aura rien dans le cercle Pc, rien entre les cercles Pe, PE.

On voit que le cône développé ne fournira que le secteur BPB′; en sorte que le compas n'aura décrit que la courbe comprise dans cet espace, ou le tiers de la courbe entière.

Théorèmes à démontrer.

Théorème. (*Fig.* 164). *Si l'on décrit une circonférence d'un diamètre quelconque dont le centre* d *soit celui du cercle inscrit dans le triangle* ABC, *la somme des carrés des distances des sommets* A, B, C, *à un point quelconque* m *de cette circonférence, multipliés respectivement par les côtés* BC, AC, AB *opposés aux sommets* A, B, C, *sera toujours la même, quel que soit le point que l'on prenne sur la circonférence. C'est-à-dire que la somme des solides* $\overline{MA}^2 \times BC$, $\overline{MB}^2 \times AC$, $\overline{MC}^2 \times AB$, *sera la même pour tous les points de la circonférence mentionnée.*

Il est visible que l'on peut, dans cet énoncé, remplacer les côtés BC, AC, AB par les sinus des angles A, B, C.

Il existe, pour la pyramide triangulaire, une proposition analogue.

Théorème. (*Fig.* 165). *Soient*, ABCDE *un polygone quelconque inscrit dans un cercle*, FGHIK *un polygone circonscrit dont les côtés touchent la circonférence aux sommets* A, B, C, D, E *du premier polygone; si l'on décrit avec un rayon arbitraire une nouvelle circonférence qui ait le même centre que la première, la somme des carrés des distances des sommets* A, B, C, D, E *à un point quelconque* m *de cette circonférence, multipliés respectivement par les tangentes* KI, KF, FG, GH, HI, *sera toujours la même. C'est-à-dire que la somme des solides* $\overline{MA}^2 \times KI$, $\overline{MB} \times KF$, $\overline{MC}^2 \times FG$, $\overline{MD}^2 \times GH$, $\overline{ME}^2 \times IH$, *est constante.*

Si le polygone ABCDE était régulier, les tangentes KI, KF, FG, etc., seraient égales, et ce serait alors la somme des carrés $\overline{MA}^2$, $\overline{MB}^2$, $\overline{MC}^2$, $\overline{MD}^2$, $\overline{ME}^2$, qui resterait constante. Ce cas particulier est déjà consigné dans la Géométrie de position.

Théorème. *Dans tout polygone, plan ou gauche, la somme des carrés des droites qui joignent deux à deux les points milieux tant des côtés que des diagonales, est le huitième de la*

somme des carrés de ces côtés et diagonales, multipliée par le produit des deux nombres que l'on forme en retranchant successivement 1 *et* 2 *du nombre des sommets de ce polygone. C'est-à-dire que si l'on désigne par* n *le nombre des sommets du polygone, par* D *la somme des carrés tant des côtés que des diagonales, par* d *la somme des carrés des droites, qui joignent deux à deux les points milieux, tant des côtés que des diagonales, on aura toujours*

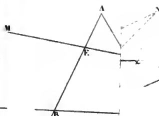
$$d = \frac{1}{8}(n - 1)(n - 2)\,D.$$

Dans le cas d'un triangle, $n = 3$, et la formule donne $d = \frac{1}{4}D$.

Si $n = 4$, on trouve $d = \frac{3}{4}D$; ainsi, dans un quadrilatère, la somme des carrés des quinze droites qui joignent deux à deux les milieux tant des côtés que des diagonales, égale les $\frac{3}{4}$ des carrés de ces côtés et diagonales.

NOTA. M. *Carnot* a donné (Géométrie de position, pages 331 et 332) la formule $d = \frac{1}{4}(n - 2)\,D$, mais M. Carnot s'est trompé. Cela devient évident lorsqu'on suit les calculs qui l'ont conduit à ce résultat; d'ailleurs, en appliquant sa formule au quadrilatère, on trouve $d = \frac{1}{2}D$, tandis qu'on devrait trouver $d = \frac{3}{4}D$, comme il est facile de s'en assurer.

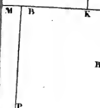
FIN.

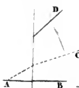

2.
A
M
E
B

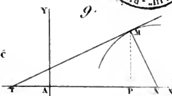

4.
N
M

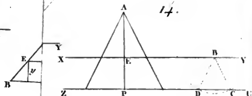


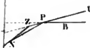


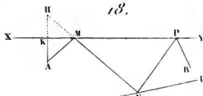





9.
Y
M
T
A
P


14.
A
X
E
B
Y
Z
P
D
C




18.
H
X
K
M
P
Y
A
B
N

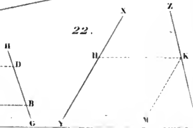
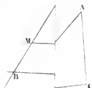

22.
X
Z
H
K
Y
M

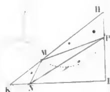
fig. 23.



26.

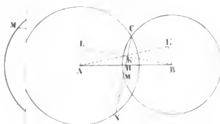


26 bis.

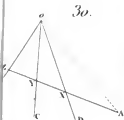




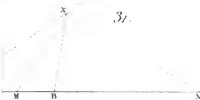
28 bis.



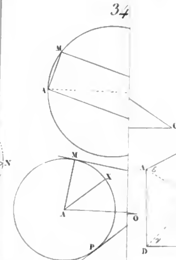
30.



31.

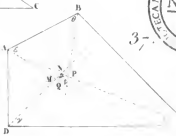


34



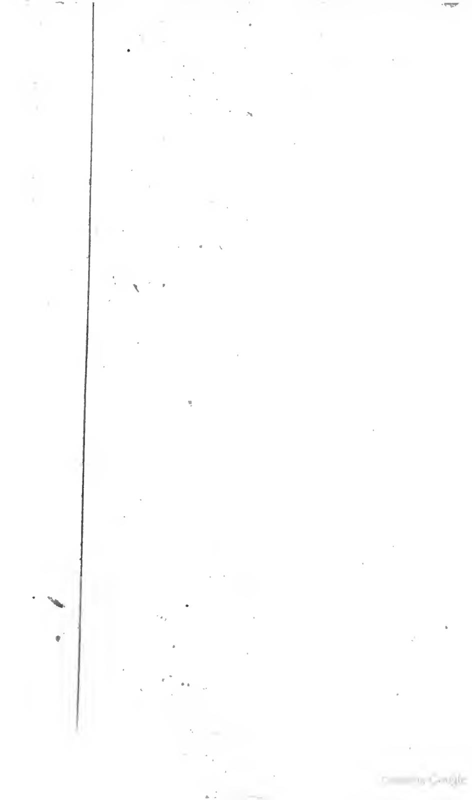
32.



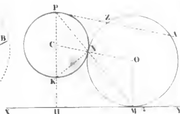


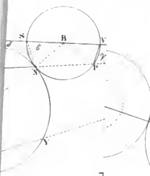


37.

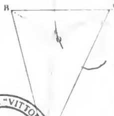



40
Y
B
B
D

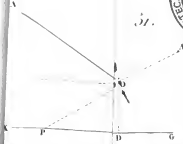

42.
P
Z
A
C
O
K
X
H
M
Y

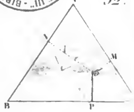

S
B
V
S
P
Y


44.
B
M
O
X
Y

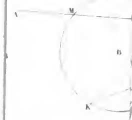

49.
B
A

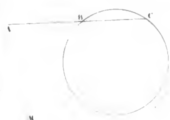

C
E

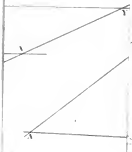

51.
A
O
K
P
D
G


52.
M
B
P

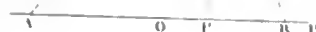


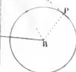

54.
M
B
K

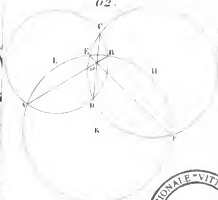

57.
B
C

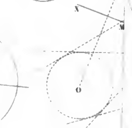

M
K
H

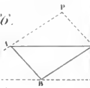


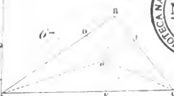

O
P


P
B


62.
C
E
B
L
H
D
K
F


M
O


66.
P
B


B
D
E
C

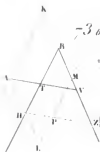


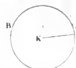



69.
C
C'
A
B
C


72.
D
H
C

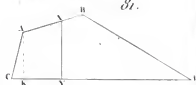


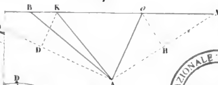

73 bis
B
M
T
V
H
P
Z
L

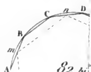

B
A
K

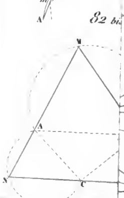
76.

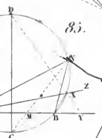

B
N
M
K
D
X
Z
Y

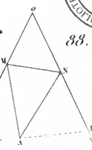

81.
B
A
C
K
Y
D


84.
B
K
o
M
D
H
A

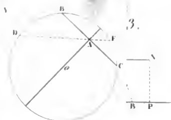

C
n
D
B
m
A

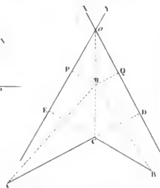

82 bis
M
A
N
C

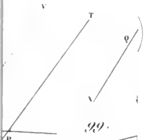

85.
D
Z
X
M
B
Y
C


o
88.
M
N
A
K
X
H



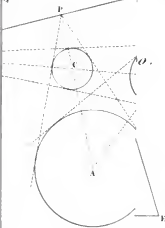

91.
B
D
A
F
o
C
3.
X
B
P

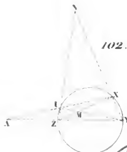

94.
X
Y
o
P
Q
M
E
D
C
A
B

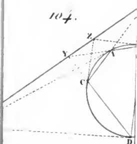

T
Q
P


B

98.


99.
P
C
A
E

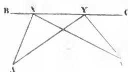

M
P
102.
X
M
Z
Y

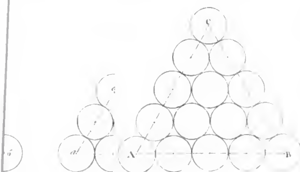

104.
Z
Y
C
D


106.
X
A


NAPOLI

107.


B
X
Y
C
A



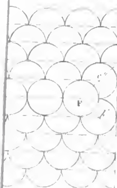
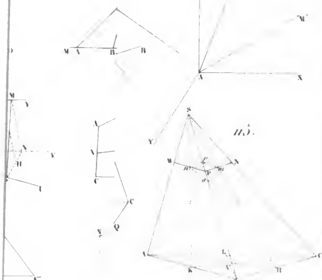


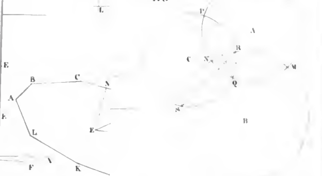
Fig. 103 bis

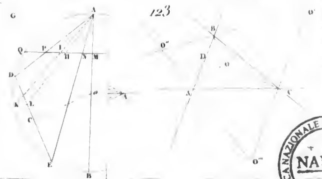


Fig. 101 bis

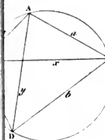


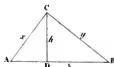

108.
111.
115.

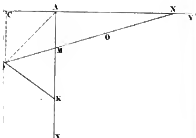

118


123

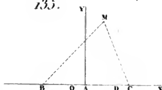


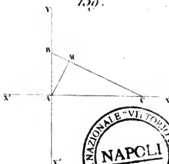

125.
A
a
x
y
b
D


128.
C
x
h
y
A
D
B


131
C
A
N
Y
O
M
K
X

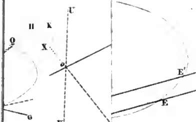

A
B

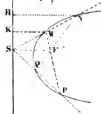

135.
Y
M
B
O
A
D
C
X

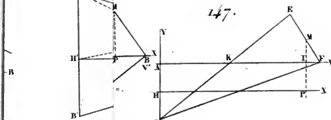

139.
Y
B
M
X'
A
C
X
Y'

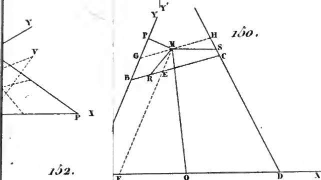


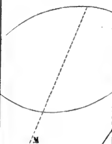


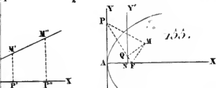

142.
U
H
K
Q
X
o
E'
E
G
V

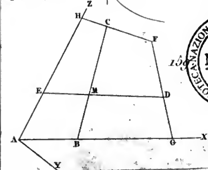

143.
H
K
S
M
F
Q
P

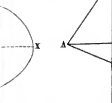

147.
K'
M
H'
P
B
X
V'
B'
E
Y
M
A
K
L
F
V
H
P'
X
D


Y
V
P
X
Y'
P
H
150.
M
S
G
C
B
R
E
F
Q
D
X


152.
M

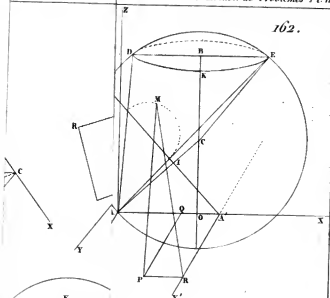

M'
M''
P'
P''
X
Y
Y'
P
M
Q
A
N
F
X

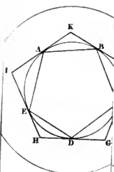

Z
H
C
F
E
M
D
A
B
G
X
Y


X
A



162.





163 *bis*.

